EUCLIDES

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

51e jaargang
1975/1976
no 5
januari

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 25,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 28,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen.
Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.
Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 5,— (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.

Tarieven: 1/1 pag. *f* 250,—, 1/2 pag. *f* 135,— en 1/4 pag. *f* 75,—.

Meetkunde leren = Σ (meetkunde doen)

J. VAN DORMOLEN

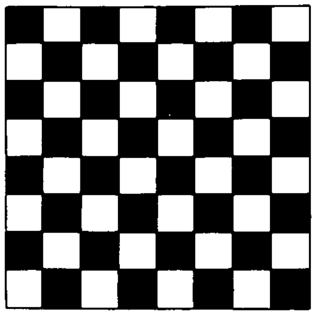
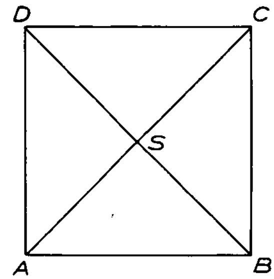
Oegstgeest

§ 1 Bovenstaande titel wil uit laten komen waar het volgens mij bij het leren van meetkunde om gaat: het samen gaan van allerlei activiteiten van leerlingen. In dit artikel zullen vier soorten activiteiten besproken worden.
Dat zal gebeuren aan de hand van achtereenvolgens een analyse van een tekst uit een schoolboek (§ 2), een analyse van de daarin voorkomende leerdoelen (§ 3) en een gedeeltelijke constructie van een lesplan op basis van die analyses (§ 4).
Ik hoop daarmee twee vliegen in een klap te slaan: ik kan door middel van concrete voorbeelden uit de lespraktijk inhoud geven aan de begrippen, die ik als leerlingenactiviteiten aanmerk en ik kan een voorbeeld geven van een gedeelte van een lesvoorbereiding.
In de slotparagraaf 5 zal ik genoemde activiteiten centraal stellen.

Ik wilde een stukje uit een schoolboek hebben waarbij brugklasleerlingen voor het eerst kennis maken met meetkunde. Dat gebeurt in blz. 25 van SIGMA, Wiskunde voor mavo, havo en vwo (Wolters-Noordhoff, Groningen 1973). De bladzijde vindt u in zijn geheel afgedrukt op pagina 169 van dit blad.[27] In het er aan voorafgaande gedeelte hebben de leerlingen het een en ander geleerd over verzamelingen in het algemeen en getalverzamelingen in het bijzonder. Ik heb SIGMA gekozen omdat ik meen in § 2 te kunnen aantonen dat de tekst hier slecht is en ongeschikt voor leerlingen, hoewel door het voorwoord 'Aan de leerling' gesuggereerd wordt dat zij het boek moeten kunnen lezen. Wie het met mijn oordeel eens is zal maatregelen moeten nemen. En dan is om te beginnen het analyseren van de tekst hard nodig. Daarom kan een slechte tekst een goede aanleiding zijn om daarmee te oefenen.

§ 2 Tekstanalyse

Vooraf een paar opmerkingen.
De onderstrepingen in de tekst op pagina 169 zijn van mij. Ik heb daarmee aan willen geven, wat naar mijn oordeel nieuwe leerstof voor de brugklasleerlingen is. Verder heb ik in de marge een paar kolommen bijgevoegd, waar-

T	A	L	C	
				1.6
				Lijnstuk – Halve lijn – Lijn vierkant – hoekpunten
1			2	In figuur 1.5 is een $_{1}$*vierkant* $_{2}$*ABCD* getekend.
3		5	4	$_{4}$We noemen *A*, *B*, *C* en *D* de $_{3}$*hoekpunten* van het vierkant. $_{5}$De
				verzameling *V* van de hoekpunten van het vierkant is $\{A, B, C, D\}$.
				  Fig. 1.5
			6	Punten $_{6}$worden altijd met een hoofdletter aangegeven. In figuur
7		7, 8		1.5 is $_{7}$ook *S* een punt. $_{8}$Het is duidelijk, dat $S \notin V$ is.
				zijde, lijnstuk, diagonalen
9, 11		12	10	$_{9}$*Zijde* $_{10}$*AB* van het vierkant $_{12}$is een $_{11}$*lijnstuk*.
	13			Een lijnstuk $_{13}$ontstaat als we met behulp van een liniaal twee
14		14		punten verbinden. In figuur 1.5 zijn $_{14}$ook *BC*, *CD* en *DA* lijn-
15				stukken, evenals de $_{15}$*diagonalen* *AC* en *BD* van het vierkant.
				In plaats van: lijnstuk *AB*, lijnstuk *BC*, lijnstuk *CD*, lijnstuk *DA*,
			16	lijnstuk *AC* en lijnstuk *BD* $_{16}$schrijven we kortweg:
				$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{AC}$ en $\overline{BD}$
			17	$_{17}$Spreek uit: 'lijnstuk *AB*', lijnstuk *BC*' enz.
				grenspunten, lengte
			18	Met $\overline{AB}$ en $\overline{BA}$ $_{18}$bedoelen we hetzelfde lijnstuk.
19				De punten *A* en *B* $_{19}$noemen we de *grenspunten* van het lijnstuk.
				In figuur 1.5 zijn de zijden van het vierkant *ABCD* elk 3 cm lang.
20		21		De $_{20}$*lengte* van $\overline{AB}$ is $_{21}$dus 3 cm.
			22	$_{22}$We schrijven:
				$AB = 3$ cm
		23		In vierkant *ABCD* $_{23}$geldt dus: $AB = BC = CD = DA = 3$ cm.
				LET OP
		24		$AB = BC$ $_{24}$want $\overline{AB}$ en $\overline{BC}$ zijn even lang.

boven de letters **T**, **A**, **L** en **C**. De betekenis van deze letters volgt verderop in dit artikel.[1] De getallen in de kolommen corresponderen met de onderstreepte tekst.
Ik wil de lezer bij voorbaat waarschuwen, dat de analyse vergezeld zal gaan van eigen overpeinzingen, die misschien wat mopperig aan doen. Wie zich daaraan stoort vraag ik toch even door te lezen. In de volgende paragrafen heb ik me constructiever opgesteld. Ik zal trouwens niet de hele bladzijde analyseren.

1 vierkant (het getal correspondeert met de onderstreepte tekst)
De leerlingen moeten leren een bepaalde figuur te herkennen als een vierkant. Anders gezegd: zij moeten leren aan het woord vierkant een begrip te verbinden, het woord moet symbool worden. Dit alles op grondniveau.[2] Zij hoeven geen eigenschappen van de figuur te kennen, zij moeten alleen de figuur herkennen. De meeste leerlingen zullen dat vermoedelijk al kunnen. Het gaat hier om het leren van een begrip, dus van een stukje theorie. Daarom staat het getal 1 in de kolom **T** (van theorie).
De figuur 1.5 waar naar verwezen wordt is slecht: er staat geen vierkant, maar een vierkant met diagonalen. Het gevaar, dat leerlingen denken dat die hele figuur, inclusief het kruis er door, vierkant heet, is niet denkbeeldig. Ook niet bij degenen, die een vierkant al op grondniveau dachten te kennen.

2 ABCD
Men leert hier dat *ABCD* de naam van dit speciale vierkant is. Maar er is meer. Iets wat veel belangrijker is: de leerlingen moeten leren waarom dat gebeurt. We geven iets een naam om het in discussies te kunnen onderscheiden van soortgenoten. Daarom leren de leerlingen hier iets op communicatief gebied en dus staat het getal *2* in kolom **C** (van communicatie).

3 hoekpunten
Hoekpunt is een begrip. Het leren ervan valt dus onder de categorie theorie (letter **T**). Ik hoop dat de leerlingen al weten wat een hoekpunt is. Ze hoeven dat niet onder woorden te brengen (expliciteren[3]), maar zij moeten in allerlei voorbeelden hoekpunten aan kunnen wijzen en zelf ook voorbeelden kunnen tekenen (abstractiefase[4]).

4 We noemen
Leerlingen leren hoe je hoekpunten van elkaar kunt onderscheiden ten behoeve van communicatie (letter **C**). De tekst kan verwarrend werken: wie nog niet weet wat hoekpunten zijn zou er gemakkelijk uit kunnen afleiden dat de letters *A*, *B*, *C* en *D* hoekpunten genoemd worden in plaats van het snijpunt van twee zijden. Hij zou zich bij de gegeven figuur nog kunnen afvragen waarom de letter *S* geen hoekpunt is.

5 De verzameling V van de hoekpunten van het vierkant is $\{A, B, C, D\}$.
Hier komt geen nieuwe informatie, maar wat er staat is wel leerstof. De leerlingen leren namelijk een logische conclusie trekken: de hoekpunten zijn *A*,

B, *C*, *D* en dus is de verzameling van hoekpunten $\{A, B, C, D\}$. Logische conclusies trekken is ook een leeractiviteit. Daarom de letter **L** (van logica). Overigens dreigt hier de onjuiste informatie dat letters hoekpunten zijn, zoals ik in *4* signaleerde, versterkt te worden. Het gebruik van verzamelingentaal op deze plaats dient trouwens nergens toe en is dus zinloos.

6 worden altijd
Duidelijk leerstof met communicatief aspect: **C**. Het boek gaat er blijkbaar van uit dat de leerling al weet wat een punt is (op grondniveau).

7 ook
In een context als hier kan het woord 'ook' twee betekenissen hebben. Het kan zijn dat er een logische conclusie getrokken wordt (**L**) óf het is de aankondiging van een nieuw voorbeeld waarmee het begrip punt verduidelijkt wordt (**T**). In het eerste geval is er zoiets bedoeld als: '*A*, *B*, *C*, *D* zijn punten, want ze worden met een hoofdletter aangegeven; het zijn speciale punten, namelijk hoekpunten. Er zijn ook nog andere soorten punten. In het midden staat ook een hoofdletter; daar is dus ook een punt'. Ik weet niet wat hier bedoeld wordt en daarom berg ik deze leeractiviteit voorlopig maar bij beide categorieën op.
Voor degeen die de in *4* genoemde onjuiste informatie gekregen heeft, die bij *5* nog versterkt wordt, is het nu helemaal onduidelijk. Om een of andere duistere reden worden *A*, *B*, *C*, *D* wel hoekpunt genoemd maar *S* niet.
Ervaren leraren weten, dat het helemaal niet denkbeeldig is, dat informatie verkeerd overkomt. Het vervelende is dat leerlingen vaak nog de indruk wekken dat ze het hebben begrepen zoals het bedoeld is. De vergissing wordt dan pas ontdekt bij een proefwerk en dat is natuurlijk te laat.

8 Het is duidelijk
Het is duidelijk dat hier wederom aan de leerling geleerd wordt een logische conclusie te trekken. Daarom staat het getal *8* in kolom **L**. Maar het is te betwijfelen of die conclusie wel op de juiste wijze tot stand komt. Ik ben bang voor een redenering als: 'Er stond dat *V* de verzameling $\{A, B, C, D\}$ is. De letter *S* komt daar niet in voor. Dus is *S* geen element van *V*'. Overigens is het veel waarschijnlijker dat er helemaal geen redenering komt en dat de mededeling voor zoete koek wordt aangenomen.

9 Zijde
Een nieuw begrip. Wordt dit geleerd? Blijkbaar rekenen de auteurs er op dat de leerling het begrip al heeft.

10 AB
Net als bij *2* een communicatief aspect: zijden kunnen we namen geven; deze zijde hier noemen we *AB*. Ik hoop maar dat de leerling, die dit leest, weet welke zijde bedoeld wordt.

11 lijnstuk

Een nieuw begrip. Weer zal ik moeten aannemen dat iedereen weet wat een lijnstuk is. Net als bij vierkant, hoekpunten, punten en zijde zou het nieuwe begrip door voorbeelden inhoud moeten krijgen, maar er staan geen voorbeelden.

12 is een

Dit is een stukje leerstof met een logisch aspect. Het is echter niet duidelijk wat er bedoeld wordt. Als er zou staan: 'Een zijde van een vierkant is een lijnstuk', dan kan men er alleen maar uit lezen dat een zijde van een vierkant een speciaal geval is van een algemener begrip, dat met de naam lijnstuk aangeduid wordt.

Ik betwijfel wel of leerlingen van de brugklas dat er uitgehaald zouden hebben. Maar de zaak is gecompliceerder doordat de zijde van het vierkant een naam heeft gekregen. Men kan niet zeggen: 'Een rechthoek is een vierkant', maar wel: 'Deze rechthoek is een vierkant', of 'Rechthoek PQRS is een vierkant' als PQRS een speciaal geval is, dat men toevallig aan het bestuderen is.

Zo is het ook met de zin: Zijde AB van het vierkant is een lijnstuk.

Er is natuurlijk bedoeld, dat een zijde een bijzonder soort lijnstuk is, maar doordat de zijde benoemd is zou men er net zo goed uit kunnen lezen, dat deze zijde, als gevolg van bijzondere omstandigheden – bijvoorbeeld doordat het een zijde van het vierkant is – ook nog een lijnstuk is. Met andere woorden: lijnstukken zijn bijzondere soorten zijden.

Deze suggestie wordt nog versterkt door het gebruik van het bepaalde lidwoord 'het'.

En om de verwarring nog groter te maken: men kan er ook nog uit lezen dat lijnstuk en zijde twee woorden voor hetzelfde begrip zijn.

13 ontstaat als we

De schrijvers bedoelen natuurlijk, dat we een lijnstuk kunnen tekenen door twee punten te verbinden met behulp van een liniaal en een potlood. Daarom heb ik het leren van deze informatie geplaatst onder het aspect algoritmische vaardigheden[5] (kolom A). Ik kan tenminste niet aannemen dat hier een soort definitie – op niveau van de leerlingen – bedoeld wordt. Dan zou het in T thuishoren, maar wel fout zijn: een lijnstuk ontstaat niet, het is er al; ook als je

14 ook

Net als bij 7 weet ik niet wat 'ook' hier betekent. Het kan een logische conclusie zijn (en dus een leeractiviteit uit de categorie L): 'In de vorige zin wordt gezegd hoe een lijnstuk ontstaat. Welnu, *B* is een punt en *C* is een punt en dus is de verbinding ervan een lijnstuk en net zo voor de andere punten'. De leerlingen hebben overigens nog niet geleerd dat de verbinding van de punten *B* en *C* door *BC* aangeduid wordt. De andere mogelijkheid is, dat hier voorbeelden van lijnstukken aangekondigd worden en dan wordt er theorie geleerd.

15 diagonalen
Weer een nieuw begrip, dus leeractiviteit in de categorie T. Alweer een bedroevend klein aantal voorbeelden.
Net als bij *1* en *2* en bij *9* en *10* is hier sprake van twee soorten informatie. Het ene hoort thuis bij categorie T: 'Zoiets noemen we vierkant, zijde, diagonaal'. Het andere soort heeft te maken met communicatie: 'Het ding waar we het over hebben is er een uit de klasse van alle dingen die we vierkant (resp. zijde, diagonaal) noemen en dit speciale ding zullen we van alle soortgenoten onderscheiden door hem ad hoc de naam *ABCD* (resp. *AB*, *AC* en *BD*) te geven'. Ik neem maar aan, dat de leerlingen bij *15* al zover gevorderd zijn, dat ze niet meer hoeven te leren, dat ook diagonalen ad hoc namen kunnen krijgen. Iets dergelijks is er in de voorgaande bladzijden trouwens ook al gebeurd toen er een paar maal over 'de verzameling *A*' gesproken is.[7]

Ik zal u verder niet lastig vallen met mijn schijnbaar pietluttig gepeuter aan de tekst. De nummers 15 tot en met 24 moet u zelf maar analyseren. Ik heb ze wel aangegeven, omdat ik alle leeractiviteiten bij deze bladzijde wilde markeren. Dat analyseren is trouwens een goede oefening als u het boek niet gebruikt en naar mijn mening een plicht als dat wel het geval is. Probeert u zich bij elk stukje nieuwe leerstof de reacties van leerlingen voor te stellen.[8]
Voor hen die het boek niet bij de hand hebben vermeld ik nog dat het op deze manier nog twee bladzijden doorgaat. Er staan leuke plaatjes en foto's bij, die echter wel geinterpreteerd moeten worden. Een stukje leeractiviteit apart. Daarna komen er achtereenvolgens een voorbeeld, waarin geleerd wordt hoe te tekenen (categorie A), een mooie foto van de wieken van een molen (interpretatie!), weer een voorbeeld en dan beginnen op bladzijde 30 de opgaven.[9]
Zo komen er voordat de leerling aan de opgaven kan beginnen, nog heel wat stukjes informatie bij. Ik heb er in totaal een kleine vijftig geteld.
Het zal na het voorgaande wel duidelijk zijn, dat ik de tekst als leertekst ongeschikt acht. Nu zou men mij kunnen tegenwerpen dat dat vanzelfsprekend is, omdat de tekst voor een eerste kennismaking te compact is; maar dat dat nu juist het voordeel van een boek als dit is: door zijn beknopte tekst en de grote hoeveelheid oefenvraagstukken kan iedere leraar zijn lessen met behulp van het boek aanpassen aan smaak, karakter, instelling, capaciteiten, etc. van hem en van zijn leerlingen.
Mijn antwoord daarop is drieërlei:
– In het voorwoord 'Aan de leerling' wordt duidelijk gesuggereerd dat het een werkboek is. Ik ken verschillende onervaren leraren, die daardoor misleid, van mening waren, dat deze tekst wel goed zou zijn voor hun leerlingen. Later begrepen ze niet waarom de resultaten zo slecht waren.
– Ook als samenvatting voor hen die alles al weten en kunnen is het geen goede tekst. Als ik leraar was zou ik mijn leerlingen regelmatig op het hart drukken niet in het boek te lezen voordat ze de vereiste begrippen goed kennen.[10]
– Wat het aanpassen aan eigen smaak betreft, daar ben ik in dit artikel nu

juist mee bezig en ik zal in §4 een gedeeltelijke uitwerking geven. Maar ik vind wel dat de schrijvers me wat meer hadden kunnen helpen.

Wie het met deze conclusies eens is en toch op goede gronden de lijn van het boek wil volgen zal nu ter voorbereiding van de les aan een meer constructieve analyse van de leerdoelen moeten beginnen. En dan blijkt de tekstanalyse naast wat ergernis, toch ook positieve gegevens te hebben opgeleverd. Ik vat daartoe samen wat ik aan leerdoelen gevonden heb.[11]
T: De leerlingen moeten een aantal nieuwe begrippen leren: vierkant, hoekpunt, punt, zijde, lijnstuk, diagonaal, grenspunt, lengte; alles op grondniveau.
A: De leerlingen moeten een tekenvaardigheid krijgen: een lijnstuk tekenen als de twee grenspunten gegeven zijn.
L: De leerlingen leren logische conclusies te trekken.
C: De leerlingen leren dat je dingen van elkaar kunt onderscheiden door ze ad hoc namen te geven en hoe je dat in de gegeven gevallen kunt doen.[12]

§3 Analyse van leerdoelen

Bij deze analyse lopen verschillende soorten overwegingen door elkaar:
– ik moet rekening houden met de *begintoestand*, dat wil zeggen met wat de leerlingen bij het begin van de les kennen, weten, kunnen, willen;
– ik moet niet alleen aan *doelstellingen* op korte termijn denken, maar ik moet ook weten wat ik op de lange duur met de leerlingen zou willen bereiken;
– ik moet de *leerstof* zodanig ordenen dat de leerlingen met inzicht[13] kunnen leren.
Deze overwegingen zullen door elkaar lopen en ik zal ook geen moeite doen om ze later uit elkaar te halen.

Theorie
T.1 *Nieuwe begrippen* Bij het doorbladeren van het boek blijkt dat de begrippen vierkant, zijde en diagonaal voorlopig maar een zeer ondergeschikte rol spelen. In hoofdstuk 4, blz. 84 e.v. wordt zijde van een driehoek eventjes belangrijk en pas in hoofdstuk 7, blz. 143 e.v. gaan vierkant en diagonaal een rol van betekenis spelen. Waarom dan nu al die begrippen? Ik kan daar twee motieven voor bedenken:
a *Uitgaan van het bekende* Bij het leren moet uitgegaan worden van wat de lerende al weet, kan, kent. Vierkant, diagonaal en zijde zijn begrippen, die brugklasleerlingen vast al eerder zijn tegengekomen. Het is geen slechte tactiek om iemand te leren wat lijnstukken, punten, grenspunten zijn uitgaande van het bekende begrip vierkant.[14] Maar dan zal ik er ook zeker van moeten zijn dat de leerlingen dat begrip ook inderdaad op grondniveau hebben en ik zal er in elk geval meer aandacht aan moeten besteden dan het boek doet. Ik kan wel gebruik maken van het schaakbord en daarin een heleboel vierkanten aan laten wijzen.
b *Voorbereiden op later* Het is een goede strategie om een begrip, dat pas veel

later op grondniveau gekend moet worden, lang van te voren terloops te laten zien en te noemen. De leerlingen zien dan telkens een voorbeeld van dat begrip en als zij het moeten gaan gebruiken is de abstractie al aanwezig.[15]

T2 *Sorteren* De meeste nieuwe begrippen moet men leren door er een voldoend aantal voorbeelden van te onderzoeken. Ik moet dus zorgen dat die voorbeelden aanwezig zijn. Het geldt trouwens niet alleen voor nieuwe begrippen. Ook begrippen die men al kent kunnen vaak het best in de herinnering teruggeroepen worden door enkele voorbeelden.

Algoritmische vaardigheid

A1 *Routine in figuren lezen* Het lijkt me belangrijk dat mijn leerlingen vlot leren tekenen en dan nog zorgvuldig met liniaal en potlood, niet met pen of balpunt. Een van de motieven is van practische aard: als ik ze nu leer eenvoudige elementaire figuren zorgvuldig te tekenen, dan zullen ze later gemakkelijker ingewikkelder figuren kunnen tekenen en andermans ingewikkelde figuren kunnen interpreteren. Later, als ze ervaren zijn in het lezen van figuren, zullen ze ook slordiger mogen zijn, maar wie dat niveau nog niet bereikt heeft zal het nodig hebben dat een vierkant er ook echt als een zuiver vierkant uitziet.

A2 Dat komt omdat de leerlingen met figuren die zuiver getekend zijn gemakkelijker zullen komen tot abstractie van de begrippen: een aantal zuiver getekende lijnstukken zien geeft sneller en beter een ideaalbeeld van het begrip lijnstuk.

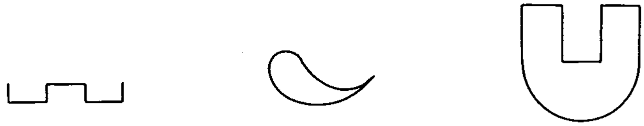
Logische ordening

L1 *Oefenen in concluderen* Logische conclusies trekken is een doel, dat ik in mijn onderwijs steeds wil nastreven en wiskunde is een bijzonder geschikt hulpmiddel om dat te leren. Het is een lange-termijndoel: ik kan nu nog niet van mijn leerlingen vragen lange sluitende redeneringen te houden. Korte conclusies trekken uit weinig gegevens is voorlopig goed genoeg.[16] Door ze veel voorbeelden te geven van korte logische redeneringen, zal ik geleidelijk aan de leerlingen ook kunnen leren langere te houden.

L2 *Deductieve structuur leren kennen* Daar bereik ik dan tevens mee dat ze leren wat 'volgen uit' eigenlijk betekent en als ze dat goed begrepen hebben kan ik misschien iets over axioma's onderwijzen. Voorlopig kan ik niet over het redeneren als zodanig praten, maar ik kan wel op de een of andere manier benadrukken dat er geredeneerd wordt. Bijvoorbeeld door gegevens en conclusie telkens op een daarvoor gereserveerd plekje op het bord te schrijven. Of tussen neus en lippen opmerken: 'Dat was een logische conclusie' of woorden van die strekking. En vooral: veel door leerlingen zelf laten doen. Elke logische conclusie die zijzelf kunnen trekken mag ik niet voorzeggen.

Communicatie

C1 *Namen geven t.b.v. communicatie* Sommige figuren geven we een naam: vierkant, cirkel, piramide. Andere niet, zoals bijvoorbeeld:



Waarom doen we dat? Dat is een kwestie van communicatie. Sommige figuren komen zo vaak voor dat het zinvol is er een naam aan te geven. Dat vergemakkelijkt de discussie.
Dat wil ik mijn leerlingen duidelijk maken: 'Je geeft ze niet die naam omdat ik zeg dat je dat moet doen, maar omdat we dan samen kunnen praten zonder de kans te lopen elkaar verkeerd te begrijpen'. Nu is dit op zichzelf ook weer leerstof, maar niet iets wat op korte termijn geleerd kan worden. Ik moet veel voorbeelden geven van dergelijke situaties; ik zal er vaak terloops op terug moeten komen (zie **T1b**) in de hoop dat mijn leerlingen op den duur die houding krijgen: 'Laten we elkaar eerst goed vertellen wat we bedoelen voordat we de kans lopen elkaar verkeerd te begrijpen'.
C2 *Namen worden symbolen* Maar er is nog een bijzonder belangrijke reden, waarom we veel voorkomende figuren namen geven. Het begrip, dat we aanduiden door het woord vierkant is meer dan alleen de figuur. Het krijgt op den duur een grotere inhoud doordat het ook de eigenschappen ervan en de relaties tussen die eigenschappen gaat omvatten. Het woord vierkant wordt symbool voor het samenstel van al die eigenschappen en hun relaties.[17] Door het noemen, horen of lezen van het woord wordt dat hele samenstel in het bewustzijn opgeroepen.[18]
C3 *Namen voor speciale dingen* De reden waarom we speciale dingen van soortgenoten door middel van namen willen onderscheiden is in **C1** al besproken. Het is voor de communicatie gemakkelijk als dat op een uniforme conventionele manier gebeurt: punten altijd met hoofdletters, lijnstukken met de namen van de grenspunten, vierhoeken met de namen van de hoekpunten op een speciaal voorgeschreven manier (met de klok mee of tegen de klok in), enz. Een heleboel van dit soort conventies kan ik door mijn leerlingen laten bepalen: 'Hoe zouden we zo'n lijnstuk een naam kunnen geven?'
C4 *AB of* $\overline{AB}$? Ik zal bijzondere aandacht moeten besteden aan het geval AB en $\overline{AB}$. Ik voel er wel voor om, zoals het boek doet, onderscheid te maken tussen het benoemen van een bepaald lijnstuk en een symbool voor de lengte ervan. Maar dan moet ik wat zorgvuldiger te werk gaan als in het boek en niet eerst lijnstuk *AB* schrijven om dan later mede te delen dat er een streepje boven de letters moet. Ik geloof niet dat de leerlingen het subtiele onderscheid tussen 'lijnstuk *AB*' en '*AB*' kunnen maken. Daarvoor is inzicht nodig en dat inzicht krijg je dóór te leren; je hebt het niet vóórdat je geleerd hebt. Daarom zal ik van het begin af aan schrijven: lijnstuk $\overline{AB}$. En ik zal ze proberen te leren: als ik $\overline{AB}$ zie dan denk ik aan het lijnstuk en ik zeg 'lijnstuk aabee'; als ik *AB* zie, dan denk ik aan de lengte van dat lijnstuk en ik zeg 'lengte van aabee'.[19]
C5 *De functie* $\overline{AB} \rightarrow AB$ Daar komt nog een moeilijkheid bij. *AB* is niet meer de naam van een speciaal uitverkoren geval, zoals $\overline{AB}$ dat is. Er is hier sprake van een functie: 'de lengte van ... is ..' *AB* is een functiewaarde of beeld, $\overline{AB}$ is daarvan het origineel. Dit is de eerste keer dat zoiets gebeurt en daarom

zal ik er nu geen aandacht aan besteden, maar later zal ik er bij soortgelijke gevallen wel op terugkomen (zie ook **T1b**).

C6 *Overzichten maken* Ik zal me proberen te houden aan de voorbeelden uit het boek. Ik kan toch niet verhinderen dat de leerlingen het boek inkijken en dan geeft een herkenbaar voorbeeld iets vertrouwds. Ik ben overigens van plan een ander belangrijk doel na te gaan streven, dat op het gebied van de communicatie ligt. Ik wil mijn leerlingen leren zelf samenvattingen en overzichten te maken. In het begin doe ik dat nog mondeling met de hele klas ('Wat heb je nu geleerd? Wat weet je nog niet zo goed?' Enz.), maar later zal ik ze ook aansporen schriftelijke samenvattingen te maken. Hoe minder ze op mij of het boek moeten vertrouwen, maar op zichzelf, hoe beter ik ze help zelfstandig te worden.

C7 *Leren sorteren* Daarom is het feit dat je een begrip leert door er voorbeelden van te onderzoeken (sorteren bij Van Dormolen; gebonden oriëntatie bij Van Hiele[20]) op zichzelf ook weer leerstof. Op den duur moeten mijn leerlingen leren zelf voorbeelden te bedenken om inzicht in een probleem te krijgen of om de oplossing ervan te vinden. Ook dit is een langetermijndoel (zie ook **T1b**).

Tot zover mijn analyse. Ik wil deze paragraaf besluiten met een paar opmerkingen ter voorbereiding van mijn lesplan.

Ik zal mijn les zo opbouwen, dat de leerlingen de gelegenheid krijgen telkens een of twee stukjes informatie te verwerken voordat ze nieuwe informatie krijgen. Niet alles ineens. Leren moet *trapsgewijs* gebeuren, niet volgens een hellend vlak. Verder wil ik hier nog eens benadrukken wat ik ook al in **L2**, **C3**, **C6** en **C7** terloops heb opgemerkt. Informatie die de leerlingen zelf kunnen verwerven wil ik ze liever niet geven. Leren door *zelf doen* is beter dan leren door zien doen.[21] Niet alleen omdat je dan beter leert, maar ook omdat je er dan meer genoegen aan beleeft. Omdat je dan het gevoel heb zelf iets gemaakt te hebben. Omdat je er van kunt leren op eigen benen te staan en niet afhankelijk te zijn van de deskundige meester.

§ 4 Gedeeltelijke uitwerking van het lesplan

Op basis van het voorgaande kan ik nu mijn lessen gaan voorbereiden. Ik zal dat in dit artikel niet in detail gaan doen. Het zou veel te lang worden. Ik geef globaal de inhoud aan en zal één onderdeel detailleren.

A Aankondiging van een nieuw deel van de wiskunde, meetkunde genaamd. ('Dat heeft niet altijd met de kunde van het meten te maken. Het is meer. Maar dat zul je in de loop van de tijd wel merken'.)

B Begrippen vierkant, zijde van een vierkant, diagonaal van een vierkant; tekenen; een paar logische conclusies.

C Hoekpunten; punten; tekenen; een paar logische conclusies.

D Benoemen van punten, vierkant, zijde, diagonaal door letters; tekenen; een paar logische conclusies.

E Lijnstuk; benoemen van een lijnstuk; tekenen; een paar logische conclusies.

F Het symbool voor de lengte van een lijnstuk; tekenen; een paar logische conclusies.

Hulpmiddelen[22] Ik zal proberen een vijftiental schaakborden te pakken te krijgen. Dat heeft het voordeel, dat de leerlingen echt bestaand materiaal in handen krijgen. Bovendien kan ik gebruik maken van het dambord aan de andere kant om velden van verschillende grootte te hebben. Lukt dat niet, dan geef ik de kinderen een stencil waarop een schaakbord met velden van 2 bij 2 cm staan getekend. (Zie begin van **C6**). Ze krijgen ook een paar vellen dun en dus enigszins doorschijnend doorslagpapier. Ieder moet een liniaal of driehoek, potlood, gum bij zich hebben. Ik zal er zelf een paar meenemen voor hen die het toch vergeten zijn.
Verder een paar posters, grote platen, landkaarten, platen van verkeersborden. Het doet er niet toe wat het is, als er maar wat verscheidenheid in zit en er vierkanten in te ontdekken zijn. Door gebruik te maken van zulk materiaal vang ik twee vliegen in een klap: ik houd rekening met de beginsituatie van de leerlingen, met wat ze al kennen, kunnen, weten en ik streef een belangrijk langetermijndoel na: uit bepaalde gegevens (hier plaatjes) bepaalde structuren (hier vierkanten) herkennen.
Werkvorm en leeractiviteiten In deze les komt het vooral aan op het aanleren van begrippen en vaardigheden. Dat zijn activiteiten, die ieder persoonlijk moet bedrijven, dus hier zijn vooral aangewezen het leergesprek en individueel werk. Hoogstens zo nu en dan met een buur samenwerken. Groepswerk zou hier alleen geschikt zijn als ik van heel andere probleemstellingen uit zou gaan.

Leerstofordening	*Commentaar*
Weet iedereen wat dit is? (Schaakbord) En dit? (Dambord) We gaan uit deze borden bepaalde figuren halen, er wat over praten. Hoe heten deze stukjes van een schaakbord? (Velden) En bij een dambord? (Ook velden)	*Orienteren*[23] op vierkant; zie **T1a**
Neem het dunne papier en leg het over het schaakbord en trek met liniaal en potlood heel netjes de rand van een veld over.	Zie **A1** en slot van § 3
Kijk wat je nu getekend hebt. Hoe heet zo'n figuur? (Vierkant) De rand van een veld is een vierkant.	*Sorteren*; zie **T1b**, **T2**, **A1** en **C7** Een veld van een schaakbord is geen vierkant, de rand wel. Daarom laat ik het ook overtrekken. Ik zal er geen speciaal punt van maken, maar wel op mijn eigen woorden letten. Leerlingen die het fout zeggen verbeter ik niet: dat zou ruis[24] zijn.
Zijn er nog meer vierkanten op het schaakbord?	Als men alleen de velden aanwijst, dan laten gaan; wie ook andere vierkanten aanwijst krijgt nu een goedkeurende knik. Ik kom er straks op terug.
Is de rand van het schaakbord zelf ook een vierkant? (Ja) En de randen van het veld van	Controle of *abstractie* bereikt is; **A2**

een dambord? (Ja)
Is de rand van dit stuk papier een vierkant? (Nee) Waarom niet? (Niet even lang als breed)

Expliciteren en tevens **L1** (en **L2**)
Ik vraag niet waarom een figuur een vierkant is; wel waarom een andere figuur geen vierkant is.

Zie je op deze platen ook vierkanten?
Zie je op het schaakbord nog andere vierkanten die niet even groot zijn als de rand van een veld? (Vierkanten van 4 velden; van 9 velden; 16 velden)

Verwerken[25] Alle antwoorden moeten goed geformuleerd worden: elke leraar is ook leraar moedertaal. Ook: **C2**

Trek op het dunne papier nog twee andere vierkanten over, die verschillend van grootte zijn.

Weer **A1** en slot van §3; het is ook een voorbereiding op straks als de lengte van lijnstukken ter sprake moet komen (**T1b**)

Van hoeveel velden kun je vierkanten maken?

L1 en **C6** Als het antwoord niet komt, dan helpen: kan het met twee velden? Drie velden? Vier velden? Enz. Zie **C7**

Hoeveel vierkanten zijn er in totaal?

Hangt van de klas en de tijd af of deze vraag gesteld wordt. Als de klas er spontaan zelf op komt dan natuurlijk op in gaan.

Kijk weer wat je getekend hebt. Elk stuk van de rand heet zijde van het vierkant.

Orienteren op zijde; **T1a**, **A1** en **A2**

Hoeveel zijden heeft een vierkant?

Abstractiecontrole

Sommigen noemen dit rand, anderen kant, weer anderen stuk en ik zeg zijde. Ik zou graag willen dat iedereen voortaan zijde zegt. Waarom zou ik dat willen?

Verwerken komt later.

Zie **C1**

Teken in een van de vierkanten op je papier van hoek tot hoek een lijn. Steeds met potlood en liniaal. Weet iemand een naam voor zo'n lijn? Zo'n lijn noemen we in de meetkunde een diagonaal van het vierkant.

Orienteren op diagonaal; **T1a**, **A1** en **A2**
Ik wil niet het woord tegenoverliggend noemen, dus ik zal de bedoelde hoekpunten met mijn vinger aanwijzen.
Sorteren
Net als bij zijde zeg ik 'van het vierkant' er steeds bij, maar ik maak de leerlingen daar niet op attent. Als zij het niet doen verbeter ik niet: ruis voorkomen.

Is er nog een diagonaal? (Ja) Teken hem dan en teken ook de diagonalen van de andere vierkanten. Heeft een vierkant nog meer diagonalen dan deze twee? Is dit – een lijn van het midden van de ene zijde naar het midden van een andere zijde – een diagonaal?

Abstractiecontrole en steeds weer tekenvaardigheid aankweken; **A1**

Waarom niet?

Expliciteren. Omdat hoekpunt nog niet geintroduceerd is ben ik met elke goede nederlandse zin tevreden, als er maar wat verstandigs gezegd wordt: **C7**

Hoeveel vierkanten staan er op een schaakbord? (64+49+36+25+16+9+4+1) Hoeveel zijden? Hoeveel diagonalen? En een dambord? En op een bord met 100 bij 100 velden [Antwoord niet uitrekenen, alleen opschrijven hoe je het moet uitrekenen].
Teken op het schaakbord alle diagonalen. Zie je nu nog meer vierkanten? Wat is het kleinste vierkant, dat door diagonalen gevormd wordt? Zijn dat ook diagonalen van dat nieuwe vierkant? Nee, hoe heten ze dan? Wat is het grootste vierkant waarvan de diagonalen zijden vormen? Hoeveel verschillende grootten zijn er van zulke schuin staande vierkanten?

Verwerken van het geheel; zie slot § 3. Deze en volgende opgaven schrijf ik op het bord, zodat ieder in eigen tempo verder kan. Omdat het hier om het oplossen van problemen gaat kunnen er groepjes van twee tot vier leerlingen samen gaan werken. Wie niet vooruit kan zal ik helpen met 'schaakborden' van 2 bij 2, 3 bij 3, 4 bij 4, enz, enz. Zie **C7** en **C6**

Tot zover onderdeel B van het globale lesplan. Natuurlijk zullen er, als ik de les in werkelijkheid zou gaan geven, variaties zijn. Dat hangt helemaal af van de reacties uit de klas.
Nog een enkele opmerking over het vervolg.
Het is wel mogelijk, dat er leerlingen zijn die bij het overtrekken van de vierkanten op hun eigen papier alleen stippen zetten op de hoekpunten, dan het papier van het schaakbord halen en de stippen verbinden. Dit verwacht ik zeker als ik echte schaakborden heb van niet al te beste kwaliteit. Dat is dan een mooi aanknopingspunt voor onderdeel C en later ook voor D en E. Als het niet gebeurt dan kan ik er wel naar toe werken als de leerlingen bezig zijn door vragen te stellen in die richting. Op deze manier ontstaan op natuurlijke wijze aanknopingspunten om over de verdere leerstof van deze les te gaan praten.

Misschien denkt u dat het allemaal te lang zal gaan duren en dat ik op deze manier in één les niet klaar kom met alle onderdelen A, B, C, D en E. Ik denk dat u daar weleens gelijk in zou kunnen krijgen. De leraar die trouw de tekst uit SIGMA volgt komt zeker in één les klaar. Hij kan de andere bladzijden van dezelfde paragraaf ook nog afkrijgen en fijn huiswerk opgeven: leren paragraaf 1.6 en maken paragraaf 1.7 som 1 t/m ... (Vult u zelf maar in). Maar de leraar hoeft helemaal niet klaar te komen, want dat is hij al lang. Anders had hij geen lesbevoegdheid gekregen. Het gaat er nu om dat zijn leerlingen klaar komen. Wie teveel haast heeft komt onherroepelijk in situaties zoals ik in § 2 bij *7 ook* beschreven heb. Leerlingen rustig de tijd geven met de leerstof klaar te komen zal op de lange duur tijdwinst opleveren.

§ 5 Leeractiviteiten

In § 1 heb ik beloofd dat ik nu duidelijk zou maken wat ik met de titel van dit artikel bedoel. Ik hoop echter dat dat niet nodig is. Ik hoop dat de lezer in de paragrafen 2, 3 en 4 al zoveel sorteervoorbeelden van activiteiten van leerlingen heeft herkend, dat ik nu alleen maar behoef te expliciteren. Daar moet ik op vertrouwen, want ik kan geen abstractiecontrole uitvoeren.

Meetkunde in het secundaire onderwijs omvat een aantal activiteiten van leerlingen. In dit artikel zijn ter sprake gekomen:
Activiteiten van *theoretische* aard: het leren kennen en herkennen van figuren. Dit ter voorbereiding van latere activiteiten, waarbij de figuren en hun naam symbool zullen gaan worden voor een samenstel van eigenschappen en relaties tussen die eigenschappen.
Activiteiten van *algoritmische* aard: vlot en nauwkeurig leren tekenen met behulp van liniaal of driehoek. Onder meer ter voorbereiding van latere activiteiten, waarbij men ingewikkelde figuren van anderen moet kunnen interpreteren en ook om de begrippen, die met de figuren samenhangen inhoud te leren geven.
Activiteiten van *logische* aard: het trekken van logische conclusies uit een beperkt aantal gegevens over een klein gebied van kennis. Dit ter voorbereiding van het leren van het doen van langere deductieve redeneringen en om te leren wat het begrip deductief eigenlijk inhoudt.
Activiteiten van *communicatieve* aard: het geven van namen aan begrippen, die vaak voorkomen ten einde discussies vruchtbaar te laten verlopen. Dit ter voorbereiding van het leren herkennen van situaties waarbij definieren noodzakelijk is. Naast discussies is er ook nog de communicatie met zichzelf: zorgvuldig formuleren helpt zorgvuldig denken.

Er zijn nog wel meer activiteiten te noemen, die in de eerste meetkundeles niet aan bod komen.
Bij theorie: ontdekken van eigenschappen van figuren; ontdekken van relaties tussen figuren; ontdekken van structuren (zoals groepsstructuur bij transformaties).
Bij algoritmen: construeren; berekeningen uitvoeren; doelmatig meten.
Er is verder nog een ander soort activiteiten, die in dit artikel maar even ter sprake zijn gekomen en dat zijn activiteiten t.b.v. probleemoplossende technieken. Ik zal daar nu niet op ingaan. Alleen wil ik vermelden dat een van die technieken in C7 even is aangestipt: door zelf te sorteren, bijv. getallenvoorbeelden bedenken, kan men soms achter de oplossing van een probleem komen waar men op het eerste gezicht geen raad mee wist. Als wij onze leerlingen zulke technieken niet leren, dan zullen velen blijven geloven, dat meetkunde iets is voor knappe koppen voorzien van gekke knobbels.

Dat brengt me op de moraal van mijn verhaal: Meetkunde leren is de som van activiteiten. Elk van die activiteiten is het doen van meetkunde door leerlingen. Daar hoort napraten en uit het hoofd leren van wat de leraar voorgedaan heeft niet bij. Instantmeetkunde is surrogaat.[26]

1 Een uitgebreide toelichting op de betekenis van deze letters in [1], p. 32 e.v.
2 Ik bedoel hier het begrip grondniveau, zoals Van Hiele dat introduceerde in zijn theorie van denkniveau's. Zie bijvoorbeeld [2], 91 e.v.
3 Dit slaat op de toestand waarbij de leerling al zover is dat hij onder woorden kan brengen wat hij weet. Zie ook [1], p. 79 e.v.
4 De toestand, die aan expliciteren vooraf gaat heb ik abstractie genoemd. De leerling kan al wel voorbeelden aanwijzen en zelf geven, maar niet duidelijk zeggen wat hij bedoelt. Zie [1], p. 79 e.v.
5 Eigenlijk is tekenvaardigheid geen algoritmische maar een psychomotorische vaardigheid. Maar ik heb het niet te ingewikkeld willen maken en daarom alles wat valt in de categorie 'Dat moet je zo en zo doen' algoritmische vaardigheid genoemd.
6 Dat is niet altijd het geval. We geven dingen ook wel eens een ad hoc naam om er gemakkelijker over te spreken, maar dan bedoelen we wel steeds elk ding met die bepaalde kenmerken. Bijvoorbeeld: 'Een functie f heet continu als ...'. Daarmee bereiken we dat we in de rest van het verhaal niet steeds 'die functie' of 'eerstgenoemde functie' hoeven te zeggen, maar kortweg: 'f'.
7 De situatie is niet helemaal vergelijkbaar. Bij verzameling A is A een volstrekt willekeurige naam, net als P bij punt P of g bij lijnstuk g. Bij vierkant $ABCD$ en lijnstuk AB ligt de naam vast doordat de hoekpunten, resp. grenspunten al een naam hebben.
8 Bij *16 schrijven we kortweg* bijvoorbeeld: 'Ik snap niet waarom ze het eerder zonder streepjes schreven, als ze nu ineens zeggen dat die erboven moeten staan'. Dit nadenken over hoe een leerling zou kunnen reageren is overigens een belangrijke en veel te weinig gebruikte techniek bij het lesvoorbereiden. Freudenthal noemt het expliciet: gedachtenproef. Zie [3], p. 97 e.v.
9 Ik ben niet bezweken voor de grote verleiding om over de vraagstukken zelf nog iets te zeggen. In het hele boek spelen vraagstukken een merkwaardige rol. Men leze [2], p. 48 en vergelijke dat met de merkwaardige tweede alinea van het voorwoord van SIGMA.
10 Zie **C6** in § 3 en ook het slot van die paragraaf.
11 Eigenlijk zou ik de hele paragraaf uit het boek in mijn overwegingen moeten betrekken, maar dat zou voor dit artikel te uitgebreid worden. Ik doe het boek daarmee niets tekort, want verderop staat weer andere leerstof.
12 Zie echter **C4** in § 3.
13 De toevoeging 'met inzicht' is hier wel nodig. Natuurlijk kan ik mijn leerlingen best leren exerceren zonder meer, maar waartoe? Sommige beren kunnen heel goed leren fietsen, maar ze doen dat alleen omdat ze een beloning of straf verwachten.
14 In vaktaal: uitgaan van het cognitieve schema. Zie bijvoorbeeld [1], p. 61 e.v.
15 Telescoped reteaching. Zie [2], p. 92 en [4], deel 2, p. 393 e.v.
16 Freudenthal spreekt over lokale ordening. Zie [3], p. 142.
17 In de theorie van Van Hiele: de leerling komt op het eerste denkniveau. Zie [2], p. 180.
18 Zie noot 14.
19 Overigens vind ik de symbolen slecht gekozen. Als een vierhoek door $ABCD$, een driehoek door ABC wordt aangeduid, is het redelijk dat een lijnstuk aangeduid wordt door AB. Zijn lengte zou dan bijvoorbeeld het symbool $\overline{AB}$ kunnen krijgen. Zie echter het nomenclatuurrapport van de N.V.v.W. (zie [5]) dat voorstelt bij de naam van de figuur steeds de soortnaam te vermelden. Het lijnstuk met grenspunten A en B is dus: lijnstuk AB; de driehoek met hoekpunten A, B en C is: driehoek ABC. Met AB en ABC bedoelt men dan de lengte van het lijnstuk, resp. de oppervlakte van de driehoek. Didactisch gezien vind ik dat een misgreep.
20 Zie [1], p. 79 e.v. en [2], p. 102 en 153.
21 Wat natuurlijk niet betekent dat een leraar nooit voorbeelden zou mogen geven. Als hij maar niet denkt, dat de leerling vaardigheden kan krijgen door de voorbeelden, die de leraar maakt. Niet het kennen, maar het actief vinden van de regels leidt tot beheersing ervan.
22 Hulpmiddelen, werkvorm, leeraktiviteiten en leerstofordening zijn onderdelen van het onderwijswerkplan, dat bekend staat onder de naam *Didactische analyse*. Over de andere onderdelen: doelstellingen, beginsituatie en leerstofkeuze is in het voorgaande al genoeg gezegd. Het onderdeel evaluatie zit verborgen in de leerstofordening. Zie [1] p. 19.
23 Orienteren betekent hier: (a) kennismaken met de bedoeling van de les of het stuk les, (b) de aandacht richten op relevante voorkennis, (c) het probleem leren kennen. In vele gevallen vallen (a) en (c) samen. Van Hiele noemt deze fase de informatie. Zie noot 20.

24 Ruis: informatie, die storend werkt op het directe doel van het leerproces. Zie [1], p. 90.
25 De fase van het inoefenen, leren beheersen van de nieuwe stof, consolideren van de kennis, integreren in de bestaande kennis. Van Hiele maakt hier twee fasen van: vrije orientatie en integratie. Zie noot 20.
26 Men leze ook: [3], p. 106 e.v.; [6], p. 55 e.v.; [7], p. 29, p. 51 e.v.
27 Om druktechnische redenen kon de pagina niet identiek overgenomen worden: de vetgedrukte woorden en het schaakbord staan in het boek in de marge. Hier moesten ze tussen de tekst geplaatst worden.

[1] Van Dormolen, Didactiek van de wiskunde; Oosthoek, Utrecht 1974.
[2] Van Hiele, Begrip en inzicht; Muusses, Purmerend 1973.
[3] Freudenthal, Mathematik als pädagogische Aufgabe; Klett, Stuttgart 1973. Van dit werk bestaat ook een engelstalige uitgave: Mathematics as an educational task; Reidel, Dordrecht 1973.
[4] Wansink, Didactische orientatie voor wiskundeleraren; Wolters-Noordhoff, Groningen 1970–1971 (3 delen, van deel 1 en 2 de tweede druk nemen).
[5] Rapport Nomenclatuurcommissie; Euclides *48*, 1972–1973, p. 241 e.v.
[6] MA-TEMA-TIKA, handboek herorientering onderwijzers; I.O.W.O., Utrecht 1973.
[7] L.B.O.-brochure; I.O.W.O., Utrecht 1973.

Didactische Literatuur

The Mathematical Gazette, vol. 59, nr. 407, maart 1975

In dit nummer zou ik willen wijzen op:
Notation and language in schoolmathematics (interim rapport van een subcommissie van de onderwijscommissie van de Mathematical Association). De commissie heeft weinig pagina's (i.c. 5) nodig voor dit rapport. Ik noem een paar van de aanbevelingen: eenheid in definities voor alle leerlingen; ze mogen wel verschillen van de universitaire praktijk als dat didactisch wenselijk is; maar we mogen nooit dingen leren die op latere leeftijd fout blijken te zijn. Bekende frasen.
De commissie geeft dan een voorstel tot uniformisering van termen en symbolen voor verschillende onderdelen van de wiskunde. De meeste hebben mijn instemming. Wel viel me op: 'multiplication between numbers should always be indicated with × and not with ·'. Zijn we hier niet bezig om juist het omgekeerde te doen (omdat we zo graag de Engelsen volgen!)?
Verder zal ook de lezer lichtelijk verbazen 'The symbol $\sqrt{x}$ always means the positive square root of the non-negative real number x'.

In 'Does it matter?' laat H. B. Shuard, die zijn studenten in een 'college of education' goed wil introduceren in de analyse, nog eens zien welke de consequenties zijn van verschillende definities van functies bij verschillende auteurs. Bepaald goed om er eens op gewezen te worden. Principiële verschillen ook in de veel gebruikte leerboeken t.a.v. de definities van limiet, continuïteit, differentieerbaarheid. Hoe kunnen onze studenten zulke boeken lezen en naast elkaar waarderen? Shuard vraagt reacties en hulp.
De Deen Allan Tarp laat in 'Report on a study tour to Farawaystan' met een kostelijk voorbeeld zien hoe wij in onze lessen de leerlingen theoretisch aanpakken, terwijl we van ze verwachten dat ze zelf praktische voorbeelden vinden.
R. P. Burn (Do you get the message?) geeft een simpele inleiding in coderingstheorie. Bij het decoderen en het corrigeren van transmissiefouten wordt gebruik gemaakt van lineaire afbeeldingen.

A. M. Koldijk

Theorie en praktijk

P. FOLKERTSMA
Den Helder

a Theorie

In een van de leerboeken wiskunde 2 voor het v.w.o. komen we de volgende behandeling tegen van drie lineaire vergelijkingen met drie veranderlijken. Uitgaande van de vergelijkingen

$$\text{I:}\begin{cases} a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3 = d_1 \\ a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3 = d_2 \\ a_3x_1+b_3x_2+c_3x_3 = d_3 \end{cases}$$

wordt dit stelsel I herleid tot

$$\begin{aligned} \Delta\cdot x_1 &= \Delta_1 \\ \Delta\cdot x_2 &= \Delta_2, \text{ waarin } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \\ \Delta\cdot x_3 &= \Delta_3 \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ en } \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

De schrijvers komen dan tot de drie volgende conclusies:

1 Is $\Delta \neq 0$ dan heeft stelsel I één oplossing, nl. $x_1 = \Delta_1/\Delta$, $x_2 = \Delta_2/\Delta$ en $x_3 = \Delta_3/\Delta$. I wordt een oplosbaar stelsel genoemd.

2 Is $\Delta = 0$ en bovendien $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ dan heeft, aldus de schrijvers, stelsel I oneindig veel oplossingen. Het stelsel I heet dan afhankelijk.

3 Is $\Delta = 0$ en $\Delta_1 \neq 0 \vee \Delta_2 \neq 0 \vee \Delta_3 \neq 0$, dan heeft stelsel I geen oplossingen en noemen we stelsel I strijdig.

b Praktijk

Voor de toepassing van de theoretische behandeling in a nemen we vraagstuk 2.3 uit 'Opgaven voor wiskunde I en II' (een uitgave van WN) dat als volgt luidt:

'2.3 Gegeven is het stelsel vergelijkingen in x_1, x_2 en x_3:

$$\begin{aligned} x_1+ax_2+a^2x_3 &= 1 \\ x_1+bx_2+abx_3 &= b \\ x_1+bx_2+b^2x_3 &= b^2 \end{aligned}$$

a Voor welke a en b heeft het stelsel vergelijkingen juist één oplossing?

b Voor welke a en b heeft het stelsel geen oplossing? Geef hiervan een meetkundige interpretatie.
c In welke gevallen heeft het stelsel oneindig veel oplossingen? Geef in ieder van deze gevallen een meetkundige interpretatie. Bereken in ieder van die gevallen de oplossingen.'

Oplossing

De coëfficiëntendeterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & ab \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix}$ is te herleiden tot $\Delta = b(b-a)^2$

Overeenkomstig conclusie a1 is er voor $b \neq 0 \wedge a \neq b$ één oplossing (de antwoorden vermelden ten onrechte $b \neq 0 \vee a \neq b$).
De determinant $\Delta = 0$ als $b = 0 \vee a = b$.
$b = 0$. In dit geval gaan de determinanten Δ_1, Δ_2 en Δ_3 over in resp.

$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ en $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ met elk de waarde 0.

Conclusie a2) leert ons dat het gegeven stelsel oneindig veel oplossingen heeft. De gegeven vergelijkingen gaan voor $b = 0$ over in

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = 1 \\ x_1 \qquad\qquad\quad = 0 \\ x_1 \qquad\qquad\quad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_2 + a^2x_3 = 1 \\ x_1 \qquad\quad\;\; = 0 \end{cases}$$

Meetkundige betekenis: Voor $b = 0$ twee elkaar snijdende vlakken (mits $a \neq 0$).
$a = b$. Substitutie hiervan geeft voor de determinanten Δ_1, Δ_2 en Δ_3 de volgende resultaten:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ b & b & b^2 \\ b^2 & b & b^2 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & b^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & b^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ en } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & b & b \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix} = 0$$

Weer volgens conclusie a2: het gegeven stelsel heeft oneindig veel oplossingen!

Substitutie van $a = b$ in de vergelijkingen geeft

$$\begin{aligned} x_1 + bx_2 + b^2x_3 &= 1 \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 &= b \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 &= b^2 \end{aligned}$$

Het valt niet moeilijk in te zien dat voor $a = b = 1$ we te maken hebben met 3 samenvallende vlakken, zodat dan het gegeven stelsel inderdaad oneindig veel oplossingen heeft.
Is echter $a = b \neq 1$ dan is de meetkundige betekenis van het gegeven stelsel twee (voor $b = -1$) of drie (voor $b \neq -1$) evenwijdige vlakken, zodat dan het gegeven stelsel, *in tegenstelling tot de conclusie a2*, geen enkele oplossing heeft!

Om na te gaan waar de onjuiste gevolgtrekking in de genoemde theoretische afleiding gemaakt is, zullen we op een andere wijze stelsel I onderzoeken. Eén van de uitgangspunten bij de volgende behandeling is dat de leerlingen bekend zijn met het verband tussen het al dan niet nul zijn van determinanten en de afhankelijkheid of onafhankelijkheid van de kolomvectoren waaruit deze determinanten zijn opgebouwd. De meetkundige interpretaties die deze afleiding vergezellen wegen voldoende op tegen het verlies aan abstractie.

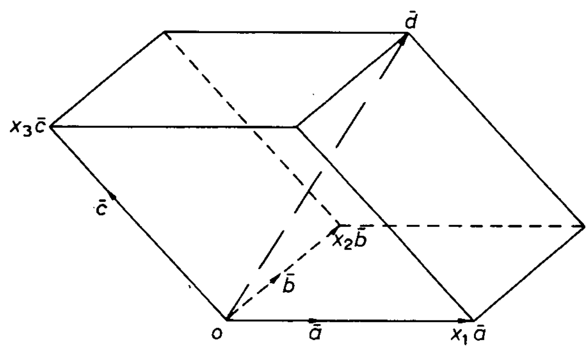
$$\text{I}\begin{cases} a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3 = d_1 \\ a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3 = d_2 \\ a_3x_1+b_3x_2+c_3x_3 = d_3 \end{cases} \Leftrightarrow \text{II } x_1\cdot\bar{a}+x_2\cdot\bar{b}+x_3\cdot\bar{c} = \bar{d},$$

met $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ en $\bar{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$.

1e Zijn $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\bar{c}$ onafhankelijk, dus $\Delta \neq 0$, dan vormen $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\bar{c}$ een basis voor $\mathbb{R}_3$ en is iedere vector $\bar{d}$ op éénduidige wijze te schrijven als lineaire combinatie van $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\bar{c}$.

Voor $\Delta \neq 0$ heeft stelsel I één oplossing (conform a1).

Meetkundig hebben we te doen met drie vlakken die door één punt gaan.



2e $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$. Nu zijn er twee mogelijkheden. De rang van de

coëfficiëntenmatrix $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ is twee, dan wel één.

(Op de derde mogelijkheid: matrix met rang 0 gaan we niet in.)

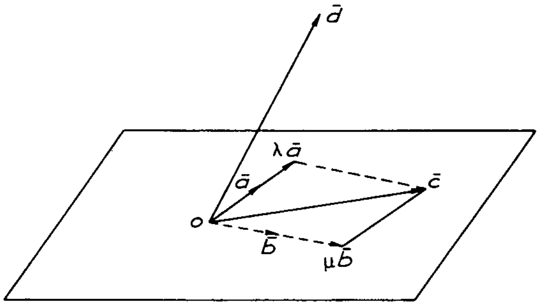
Eerste mogelijkheid; rang matrix is twee.

Laten we gemakshalve veronderstellen dat $\bar{c}$ te schrijven is als een lineaire combinatie van de onafhankelijke vectoren $\bar{a}$ en $\bar{b}$: $c = \lambda\ \bar{a}+\mu\bar{b}$. Stelsel II gaat dan over in $x_1\cdot\bar{a}+x_2\cdot\bar{b}+x_3\cdot(\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}) = \bar{d} \Leftrightarrow x_1'\cdot\bar{a}+x_2'\cdot\bar{b} = \bar{d}$ met $x_1' = x_1+\lambda x_3$ en $x_2' = x_2+\mu x_3$.

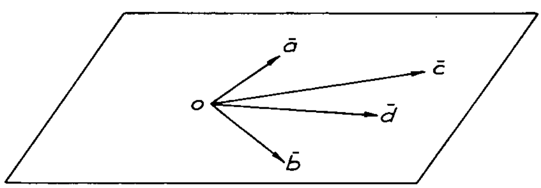
Behoort $\bar{d}$ nu niet tot de R_2 opgespannen door $\bar{a}$ en $\bar{b}$, wat inhoudt dat

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \neq 0$$ is, dan is stelsel I strijdig (zie volgende fig.).

Dit is conform a3 want $\Delta = 0$ en aan één van de voorwaarden $\Delta_1 \neq 0 \vee \Delta_2 \neq 0 \vee \Delta_3 \neq 0$ is zeker voldaan ($\Delta_3 \neq 0$).



Is daarentegen $\Delta_3 = 0$, dan behoort $\bar{d}$ tot de door $\bar{a}$ en $\bar{b}$ opgespannen ruimte en is $\bar{d}$ op oneindig veel manieren te schrijven als een lineaire combinatie van $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\bar{c}$.

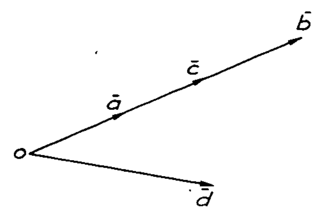


Bovendien geldt: $\Delta_1 = 0$ en $\Delta_2 = 0$, zodat ook nu het resultaat overeenstemt met conclusie a2.

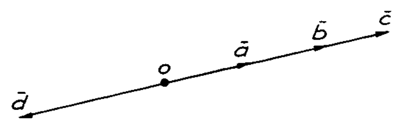
Tweede mogelijkheid: rang matrix is één.
Neem aan dat $\bar{b} = \lambda\bar{a}$ en $\bar{c} = \mu\bar{a}$.
Nu blijkt de gesignaleerde onjuistheid in de door de schrijvers gegeven conclusie!
Elk van de determinanten

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & \lambda a_1 & \mu a_1 \\ d_2 & \lambda a_2 & \mu a_2 \\ d_3 & \lambda a_3 & \mu a_3 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & \mu a_1 \\ a_2 & d_2 & \mu a_2 \\ a_3 & d_3 & \mu a_3 \end{vmatrix} \text{ en } \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & \lambda a_1 & d_1 \\ a_2 & \lambda a_2 & d_2 \\ a_3 & \lambda a_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

heeft de waarde nul!!
Volgens conclusie a2 leidt dit tot oneindig veel oplossingen voor stelsel I, terwijl het zonneklaar is dat als $\bar{d}$ niet tot de door $\bar{a}$ opgespannen ruimte behoort, er geen enkele oplossing is (zie figuur).



Behoort $\bar{d}$ wel tot de door $\bar{a}$ opgespannen ruimte dan zijn er oneindig veel oplossingen.



Als we op de zojuist aangegeven wijze opnieuw vraagstuk 2.3 gaan oplossen, zijn we betrekkelijk vlug klaar.
Voor het gegeven stelsel schrijven we

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a\\b\\b\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}a^2\\ab\\b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\b\\b\end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & ab\\1 & b & b^2\end{vmatrix} = b(a-b)^2$$

$\Delta \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0 \wedge a \neq b.$
De 3 kolomvectoren uit Δ spannen de $\mathbf{R}_3$ op. Eén oplossing.
$\Delta = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee a = b$
$b = 0.$

$$\Delta = \begin{vmatrix}1 & a & a^2\\1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{vmatrix} \quad \text{Basisvectoren}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} \quad (\text{mits } a \neq 0)$$

$$\begin{vmatrix}1 & a & 1\\1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\b_2\\b\end{pmatrix} \text{ voor } b = 0 \text{ afhankelijk van de basisvectoren.}$$

Oneindig veel oplossingen.
Stelsel I gaat over in $ax_2+a^2x_3 = 1,$
$x_1 = 0.$
Voor $a \neq 0$ stelt dit een rechte voor.

$a = b$. Basisvector $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

voor $b \neq 1$ is $\begin{pmatrix}1\\b\\b_2\end{pmatrix}$ onafhankelijk van $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Geen oplossing. Meetkundig: twee of drie evenwijdige vlakken.
Voor $b = 1$ oneindig veel oplossingen. Het gegeven stelsel stelt dan drie samenvallende vlakken voor.

Verscheidenheden

Prof. Dr. O. BOTTEMA
Delft

XCV *Brieven van Euler*

Het leven van Leonhard Euler, dat de achttiende eeuw vrijwel vult, kan naar de domicilies van de grote man in vier tijdperken worden verdeeld: Bazel en omgeving (1707–1727), het toenmalige Sint Petersburg (1727–1741), Berlijn (1741–1766) en opnieuw Sint Petersburg (1766–1783). In zijn tijd namen de exacte vakken aan de universiteiten nog een zeer ondergeschikte positie in en de meest eminente beoefenaren waren òf amateurs, òf vrijgestelden wie het door een *sponsor* mogelijk werd gemaakt zich zonder materiële zorgen en zonder veel omschreven verplichtingen aan hun wetenschap te wijden. De hulp bestond dikwijls in de benoeming tot lid van een *Academie*, de geinstitutionaliseerde vorm waarin een vorst (niet zelden was het een vorstin) van zijn belangstelling voor wetenschap en kunst blijk gaf en die ook wel zijn status als verlicht beschermer der cultuur ten goede zal zijn gekomen. Door bemiddeling van enige Bernoulli's werd Euler reeds als veelbelovende jongeling verbonden aan de nog door Peter de Grote ontworpen Academie te Sint Petersburg. Hij voelde zich daar zeer wel thuis, maar toen omstreeks 1740 de politieke situatie ter plaatse onzeker werd, leek het Euler verstandig zich beschikbaar te stellen voor *transfer*. Frederik de Grote riep hem naar Berlijn waar hij – opvolger van Maupertuis, voorganger van Lagrange – vijfentwintig jaar is gebleven. Er zijn berichten dat hij er zich minder gelukkig voelde dan in de Russische hoofdstad; de libertijnse geest van de koning, de *esprit* en de spot van Voltaire, de spitse discussies aan het hof harmonieerden slecht met de ernstige, gelovige, weinig sprankelende natuur van de predikantszoon uit Zwitserland. Ten slotte keerde hij naar Petersburg terug waar hij onder bescherming, nu van Catharina II, tot zijn dood in aanzien leefde en met zijn grote gezin in een welstand die hem zelfs toestond te beschikken over wat in onze dagen een tweede huis heet.

Hoewel Euler ongetwijfeld een der grote figuren is uit de geschiedenis der wiskunde zal men hem toch de genialiteit van een Newton of een Gauss moeten ontzeggen. Eerder verschijnt hij ons als de superieure vakman, de grootmeester ener fenomenale mathematische techniek. Wat dat betreft leefde hij in een tijd die bij zijn aanleg paste; de voorgaande eeuw had de fundamentele ontdekkingen gebracht: de analytische meetkunde, de infinitesimaalrekening, de

mathematische behandeling der mechanica. Op deze turbulente ontwikkeling volgt in de persoon van Euler de consolidatie, de uitwerking, de systematisering en de toepassing van de nieuwe apparatuur.
Hoewel onder meer drie hoeken en een lijn naar hem heten[1]), zijn het toch in de eerste plaats de getallen en hun relaties die de aandacht hadden van Euler, *analysis incarnata.* Als Condorcet in zijn *Eloge* met intieme eenvoud het plotselinge heengaan beschrijft, dan eindigt hij: „– lorsque tout-à-coup la pipe qu'il tenait à la main lui échappa, et il cessa de calculer et de vivre". Dat calculeren moet dan wel in een zeer algemene zin worden verstaan en het omvat onder veel meer het ontwikkelen van nog dagelijks toegepaste wiskundige methodes, het opstellen van enige fundamentele stelsels differentiaalvergelijkingen, het leggen van de grondslag voor de variatierekening en het ontwerpen van een mathematisch model der hydrodynamica. Daar komt nog bij dat hij een grote intellectuele energie en een uitzonderlijke snelheid van werken bezat, die nauwelijks verminderden toen hij met fysieke blindheid was geslagen. Zijn wetenschappelijke produktie is verbijsterend; zij omvat een reeks van boeken en honderden artikelen. Zijn geboorteland, na zijn twintigste jaar slechts „vaderland in de verte", eert zijn gedachtenis door een monumentale uitgave van zijn *Opera omnia*, waarvan sinds 1911 vele tientallen quarto delen zijn verschenen en die nog steeds wordt voortgezet. In de geschriften wordt inderdaad veel gecalculeerd en soms bestaat de tekst in hoofdzaak uit formules, vergelijkingen en numerieke voorbeelden, aan een geregen door een dun snoer van verbindende woorden; de voertalen zijn latijn, frans en duits. De inhoud (voorzien van annotaties door een rij van bewerkers) is twee eeuwen oud maar helder en vaak boeiend, en wordt nog verrijkt door bijdragen als de reeds genoemde Eloge[2]) en de *Lobrede auf Herrn Leonhard Euler*[3]) uit 1783 door zijn schoonkleinzoon Nicolaus Fusz (het woord is niet gangbaar, maar het begrip wel duidelijk).
Onder de werken van Euler komt een geschrift voor dat naar bedoeling, vorm en inhoud geheel afwijkt van zijn overige publicaties; een uitgave namelijk niet van wetenschappelijke maar van populariserende aard. Het is een bespreking van elementaire natuurwetenschappelijke begrippen en wetmatigheden, in aanleg bestemd tot lering van de jeugd. De grote mathematicus gebruikt daarin geen enkele wiskundige term; hij tracht zich te verplaatsen in de gedachtengang van de belangstellende onwetende en geeft zich alle moeite door voorbeelden uit het gemene leven begrip bij te brengen voor de fysica van zijn tijd. Het boek is ontstaan in 1760–62, dus in de Berlijnse periode. Euler was in contact gekomen met de Markgraaf van Brandenburg Schwedt (een bloedverwant van Frederik II, al was de verstandhouding weinig vriendschappelijk). Er schijnt sprake van te zijn geweest dat Euler onderwijs zou geven aan diens beide dochters, maar dat beperkte zich ten slotte tot schriftelijke lessen aan het oudste meisje, Friederike, geboren in 1745 en reeds op haar tiende jaar (zo ging dat, in die dagen, in die kringen) benoemd tot coadjutor van het stift te Herford, van welk voor de hoge adel bedoelde instituut zij van 1765–1808 abdes is geweest. Euler schreef haar 234 in het frans gestelde brieven, die aan het overigens vrome en ernstige meisje wel niet helemaal besteed zullen zijn geweest. Hoe het kind reageerde is niet bekend. De brieven zelf zijn niet terug-

gevonden, maar de afzender had blijkbaar copie gehouden want in de jaren 1768–72 werden zij te Petersburg uitgegeven onder de titel *Lettres à une princesse d'Allemagne.*[4])

De uitgave had alle kenmerken van een *bestseller*. Het boek werd al spoedig her- en nagedrukt in integrale en in verminkte vorm en er verschenen vertalingen in vele landen; de publicaties zetten zich voort tot ver in de negentiende eeuw. In de *Opera omnia* is het inmiddels ook verschenen[5]), met een uitvoerige inleiding van A. Speiser en met een herdruk van een vroeger door G. Eneström opgestelde bibliografie[6]). Deze vermeldt vertalingen in het Russisch, Duits, Nederlands[7]), Zweeds, Italiaans, Deens, Engels en Spaans.

Het overweldigende succes van de uitgave kan enerzijds worden verklaard uit de voortreffelijke inhoud, anderzijds uit het tijdvak van haar verschijning, waarin het blijkbaar zoals dat heet in een behoefte voorzag. Het is die merkwaardige historische periode waarin bij het beschaafde deel der natie intense belangstelling gaat bestaan voor de kennis der natuur, voor fysica, biologie en techniek, een interesse die zich manifesteert bij de gegoede burgerij en doordringt tot in de salons; het is de tijd waarin hier te lande de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen, het Bataafsch Genootschap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte en vele andere soortgelijke gezelschappen tot stand komen, de tijd van de *physique amusante*, het anatomisch theater en de Leidse fles, de tijd waarin naar het woord van Valéry de dames der patriciërs zich met vertedering bogen over de wieg van glas en koper waarin het borelingske lag met de naam *Electricité*. Het is een boeiende episode uit de geschiedenis der cultuur en zelfs onze Huizinga, anders matig geinteresseerd in haar natuurwetenschappelijke aspecten, weet van Euler af, noemt althans zijn naam en het betrokken geschrift in een lezenswaard opstel over de periode[8]).

Het is uiteraard niet de bedoeling hier een uitvoerig overzicht te geven van de inhoud der brieven. Men kan gerust zeggen dat zij ook nu nog het lezen zeer wel waard zijn, waarbij de vreugde van de lectuur wordt verhoogd indien zij mag geschieden uit een exemplaar van eigen bezit, een fraaie Franse editie[9]), gul geschenk uit vriendenhand.

Wij geven een vluchtige schets van de onderwerpen die Euler de prinses tot haar lering toezond. Hij begint met wat algemene opmerkingen over grootheden, toegelicht met begrippen als afstand en lengtemaat. De bespreking van verplaatsing en snelheid leidt tot het besef dat ook een niet stoffelijk verschijnsel als het geluid een snelheid heeft. Er volgt een reeks brieven over muziek, over octaaf, quint en kleine terts, over trillingsgetallen en toonladders. Wij komen dan op het medium dat het geluid voortplant en horen over de luchtpomp en de luchtdruk („plus l'air est condensé, plus il fait d'efforts pour s'étendre"), over de windbuks, de atmosferische druk en de barometer, die *Votre Altesse* vooral niet moet verwarren met de thermometer, die óók een kwikkolom heeft. De beide instrumenten zijn aanleiding tot een excursie naar klimaat en weer, hier en elders; de verklaring van de paradox dat het op een berg, toch dichter bij de zon, kouder is dan hier beneden, leidt naar eigenschappen van licht- en warmtestralen. De brieven 17 t/m 44 zijn dan alle gewijd aan de optica, al dadelijk aan het wezen van het licht volgens Descartes (onze Huygens wordt niet genoemd) en volgens Newton (Uwe Hoogheid zal er zich over verbazen

dat een zo groot man zo'n absurde theorie heeft opgesteld) en dan voorts aan lichtsnelheid, doorzichtige stoffen, kleuren, terugkaatsing en breking, schaduw, vlakke en sferische spiegels, brandglazen en aan „l'oeil, qui surpasse infiniment toutes les machines que l'adresse humaine est capable de produire".
Zoals men ziet: een eenvoudige cursus natuurkunde zoals die ook nu nog gegeven kan worden. De presentatie is helder en geduldig, maar geenszins wijdlopig. Gecalculeerd wordt er niet maar een stel goede tekeningen verduidelijkt de tekst.
De geleerde schrijver van de *Theoria motus* gaat nu Friederike in de mechanica onderwijzen en heeft daar meer dan dertig brieven voor nodig. Het vallen, de zwaartekracht, de bolvorm van de aarde, de „gravité de la lune", de appel in Newton's tuin, de algemene attractiewet (ook kwantitatief, niet met formules maar met getallen voorbeelden) en de beweging van planeten en kometen komen aan de orde, alsmede zeer uitvoerif het verschijnasel van eb en vloed. De geheimzinnige „werking op afstand" brengt Euler tot natuurfilosofische vragen en spoedig komen in de brieven daarmee verwante problemen in bespreking. De man die beter dan iemand weet dat de bewegingen van stoffelijke lichamen en in het algemeen de verschijnselen in de materie voorspelbaar zijn omdat zij volgens mathematisch formuleerbare wetten verlopen, wil dit determinisme verzoenen met de van thuis meegekregen inzichten over goddelijk ingrijpen, over de vrije wil en de verantwoordelijkheid des mensen. En zo gaat Euler in de volgende veertig brieven op de theologische toer, zoals dat tegenwoordig moet heten. De correspondentie betreft nu niet meer barometers en thermometers, convexe en concabe lenzen, maar geest en stof, lichaam en ziel[10]), goed en kwaad, zonde en vergeving, het gebed, het hiernamaals. Daarbij maakt de bedachtzame docent herhaaldelijk plaats voor de polemische auteur, die zich keert tegen het materialisme, tegen Leibniz, de monadenleer, de voorbeschikte harmonie en die het jonge meisje waarschuwt voor de verderfelijke opvattingen van Christian Wolff, de rationalistische filosoof der Verlichting. De waarde die aan deze passages van Euler wordt gehecht zal in hoge mate afhangen van de overtuiging van wie ze leest[11]). De filosofische beschouwingen zetten zich voort tot in Brief 132; daarbij zijn de nos. 103–108 gewijd aan een minder controversieel onderwerp, de structuur der syllogismen.
Na dit alles komt de natuurkunde terug, maar de systematiek schijnt er wat uit. Wij krijgen eerst weer opmerkingen over kleur en toon en taal en daarna een twintigtal brieven over electriciteit (no. 149: Sur l'expérience de Leyde; no. 151: Sur la nature du tonnerre). Nadat Friederike dan geleerd heeft dat de kortste weg op een bol langs een grote cirkel gaat, wordt haar uitvoerig bericht over vijf methoden om de geografische lengte te bepalen. Er volgt een reeks brieven over het magnetisme, met onder meer de miswijzingen van een kompas. De rest van het boek, nog bijna vijftig brieven bevattend, is merkwaardigerwijs geheel gewijd aan optische instrumenten, aan microscopen, verrekijkers, telescopen en brillen, alles uitvoerig met beeldvorming, angulaire vergroting en gezichtsveld – men gaat er aan twijfelen of al de details de prinses zullen hebben geboeid. Er wordt nog eens teruggekomen op het blauw van de hemel, een voorrecht ons geschonken doordat de lucht niet volkomen transparant is, opnieuw een reden „de reconnaître et admirer la bonté infinie et la

sagesse du Créateur". Met opmerkingen over de straalbreking wordt in mei 1762 de tekst abrupt afgebroken.
Zoals uit dit overzicht kan blijken is het befaamde en aantrekkelijke werk een weinig evenwichtig gecomponeerd geschrift; dat heeft het met veel andere correspondentie gemeen. Het zijn gewoon brieven – maar dan van Euler.

[1]) Zie b.v. *Euler geometer*, Verscheidenheden LXXVIII, Euclides 46 (1970–71), 97–100.
[2]) *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Serie 3, Vol. 11, (Zürich, 1960), 287–312.
[3]) *Opera*, Serie 1, Vol. 1 (Leipzig–Berlin, 1911), 42–95.
[4]) *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie.* Tome premier. A Saint-Pétersbourg, de l'imprimerie impériale des sciences. MDCCLXVIII. De beide andere delen volgden spoedig daarna.
[5]) *Opera*, Serie 3, Vol. 11, deel I en II (Zürich, 1960).
[6]) De lijst, blijkbaar niet bijgewerkt, is onoverzichtelijk; zij bevat herhalingen en is ook verder, zoals uit de opgave der Nederlandse edities blijkt, onzorgvuldig.
[7]) *Brieven over de voornaamste onderwerpen der natuurkunde en wijsbegeerte* door den Hoogleraar L. Euler, volgens de laatste Hoogduitsche en Fransche uitgave vertaald. Te Leyden, bij Pieter Pluygers. Eerste deel (1785), Tweede deel (1785), Derde deel (1786). Een ex. bevindt zich o.a. in de bibliotheek der T.H. te Delft.
[8]) J. Huizinga, Natuurbeeld en historiebeeld in de achttiende eeuw, (Neophilologus 19, 1934, 81–95 = Verzamelde Werken 4, 1949, 341–359).
[9]) *Lettres à une princesse d'Allemagne* sur divers sujets de physique et de philosophie, par L. Euler, Nouvelle édition, conforme à l'édition originale de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, revue et augmentée de diverses notes par J.-B. Labey, Tome premier (Paris, 1812), Tome second (id.).
[10]) Sommige uitingen van Euler doen merkwaardig aan. Wij citeren uit Brief 81: „Il y a un certain lieu dans le cerveau, où tous les nerfs aboutissent; et c'est là que l'âme a sa résidence".
[11]) In een aantal edities van de *Brieven* zijn ze als niet ter zake weggelaten of bekort. Daarentegen zegt Speiser bij zijn toelichting in de Opera Omnia (p. 14): „In den Briefen 85–92 folgt nun seine eigene Lehre, welche einen der Höhepunkte der Briefe bildet und von unabsehbarem Einflusz auf die klassische Deutsche Philosophie wurde", welke op zijn minst sterk overtrokken uitspraak later (p. 28) gevolgd door de bewering: „In dieser Weise machte Euler die Bahn frei für die moderne Physik".

Enige gedachten bij het examen 1975 V.W.O.-wiskunde I

C. v. d. HEIJDEN, A. RAMAKER

Vlaardingen Spijkenisse

De commissie die de examenopgaven en de bindende normen voor de correctie vaststelt geeft iedere kandidaat 20 punten gratis in plaats van de gebruikelijke 10, waarna de kandidaat er 80 (i.p.v. 90) kan verdienen met zijn prestatie. Blijkens een schrijven bij de normen is deze regeling er speciaal ten bate van een groep kandidaten die, als ze alle nu geldende toelatingsregels tijdig hadden geweten, wiskunde I misschien niet hadden gekozen omdat ze via een voortentamen in wiskunde tot de faculteit van hun keuze hadden kunnen doordringen.
Blijkbaar weet de commissie van het bestaan van deze kandidaten en van dit probleem af.
Het is te prijzen dat er achteraf voor deze mensen iets gedaan wordt, waar niemand anders schade door lijdt, maar wij vinden dat 'achteraf' een oneigenlijke vorm van hulpverlening.
Omdat er zulke kandidaten zijn en ook omdat er kandidaten zijn die wiskunde I doen om economie of medicijnen te kunnen gaan studeren of die aan het eind van klas 4(!) nog niet wisten wat ze wilden maar wel beseften dat wiskunde een zeer bruikbaar vak is bij vele studies of beroepsopleidingen, dient het examen een ander karakter te hebben dan dit van 1975.
Van 4 opgaven dienen o.i. de eerste 2 een middel te zijn om te onderzoeken of de kandidaten hun verplichte stof begrepen en verwerkt hebben en toe kunnen passen zonder een sterk appèl op eigen inventiviteit. Opgave 3 mag gerust meer eisen en nummer 4 kan desnoods het karakter van toelatingsopgave tot studie in de wiskunde dragen.

Als het examen 1975 als maatgevend voor de toekomst beschouwd moet worden, dan kunnen leerlingen die in klas 4 niet briljant in wiskunde zijn het beter niet meer kiezen.
Dan kunnen ze later geen economie of medicijnen gaan studeren of H.T.S. gaan doen.
Of is dat misschien juist de bedoeling?
Want zo worden studentenstops (die publiekelijk nogal zwaar wegen) overbodig gemaakt, en zo worden gemiddelden van eindlijsten omlaag gedrukt zodat ongeveer niemand meer zonder loting op een universiteit kan komen.

In het najaar van 1973 heeft de Vereniging van Wiskundeleraren diverse voorlichtingsvergaderingen georganiseerd, waarvan wij die te Haarlem hebben bezocht.
Daar is toen door de inspecteur gezegd dat de examenopgaven niet zouden gaan over stof die in gangbare leerboeken niet voorkomt en dat de opgaven uit het boek van Dr. Groeneveld deels te eenvoudig, deels te moeilijk waren als examenopgave. Onze mening over het afgelopen examen is dat het merendeel der opgaven minstens zo moeilijk was als de zwaardere opgaven uit het boek van Dr. Groeneveld, terwijl minstens één onderdeel in een gangbaar leerboek niet aan de orde komt.
Als dan in de examentijd ook nog persberichten verschijnen met plannen om in de toekomst het eindcijfer hoogstens 1 punt te doen verschillen van het cijfer van het centraal schriftelijk eindexamen, dan dringt de gedachte zich op dat men aan schoolonderzoekcijfers niet zo veel waarde hecht of zelfs dat we er van verdacht worden door extra hoge cijfers leerlingen veilig te stellen.

Misschien zou een meer gedetailleerd examenprogramma dat ook bindend is voor de opgaven-commissie een middel kunnen zijn om leraren en examensamenstellers wat meer op één golflengte te brengen en juist de zwakkere kandidaten te beschermen tegen examens die als toelatingseis tot wiskundefaculteiten alleszins aanvaardbaar lijken.

Enige kritische kanttekeningen bij het examen Wiskunde II (1975) voor het V.W.O.

A. RAMAKER, C. v. d. HEIJDEN

Spijkenisse, Vlaardingen

Het examen Wiskunde II van 1975 is het 3e examen dat als richtingwijzer kan dienen voor de inhoud die het vak Wiskunde II in het V.W.O. moet hebben. Het examen en herexamen van 1974 gingen hieraan vooraf. Bezien wij deze examens dan moeten wij tot de conclusie komen dat het vak Wiskunde II voornamelijk rust op twee pijlers, n.l. de onderwerpen 'Bollen' en 'lineaire afbeeldingen'. Hoe deze combinatie tot stand is gekomen mag voor velen een verrassing heten en de onderlinge samenhang tussen deze twee onderwerpen zal menigeen ontgaan. Het vak Wiskunde II is nieuw en men zou mogen verwachten dat de examencommissie zeker in het begin een zekere voorzichtigheid zou betrachten bij het samenstellen van de opgaven om de wiskundedocenten de gelegenheid te geven zich in te spelen in het vak Wiskunde II.
Eén van de inspecteurs van het wiskundeonderwijs heeft tijdens een vergadering, uitgeschreven door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, gezegd dat de eerste examens onderwerpen zouden bevatten, die een g.g.d. vormden van de onderwerpen in de gangbare leerboeken*.
Wanneer we uitgaan van het examen 1975 dan kunnen de volgende kritische kanttekeningen gemaakt worden:

1 De hoeveelheid werk was veel te veel voor drie uur examentijd.
2 De aan de orde komende onderwerpen vormden geen g.g.d. van de onderwerpen uit de gangbare leerboeken, maar een k.g.v.
3 De vraagstelling was in redactioneel opzicht niet vlekkeloos.
4 In wiskundig opzicht is vraagstuk 3c te bekritiseren.

ad 1 De examenkandidaten moeten een rustig gevoel gekregen hebben toen zij constateerden dat dit examen 'slechts' 3 vraagstukken bevatte.
In werkelijkheid had men er ook rustig 6 van kunnen maken, en wel als volgt:
vraagstuk 1: 1a en 1b
vraagstuk 2: 1c

* Onder de gangbare leerboeken verstaan we:
'Getal en Ruimte', K. de Bruin, e.a.
'Moderne Wiskunde', G. Krooshof, e.a.
'Vectormeetkunde', Dr. A. van Dop, e.a.

vraagstuk 3: 2a en 2b
vraagstuk 4: 2c
vraagstuk 5: 3a en 3b
vraagstuk 6: 3c

ad 2 Indien wij ervan uitgaan dat een vraagstuk niet uit kettingvragen mag bestaan, maar dat elk onderdeel zelfstandig opgelost moet kunnen worden, dan kan vraagstuk 2c het meest elegant en het kortst opgelost worden met de begrippen 'eigenwaarde' en 'eigenruimte'. Deze begrippen komen alleen aan de orde in het boek 'Getal en Ruimte', echter niet in 'Moderne Wiskunde' en 'Vectormeetkunde'. Het examenprogramma vermeldt deze begrippen niet expliciet. Het begrip 'macht een van punt t.o.v. een bol' kan tot steun dienen bij de oplossing van vraagstuk 1c, 'Moderne Wiskunde' behandelt dit onderwerp echter niet.

ad 3 Het zou te hopen zijn dat de exacte vakken gevrijwaard blijven van een (soms ideologisch) bepaalde vakjargon. In de huidige tijd schijnt dit vakjargon noodzakelijk te zijn om het eigen vak status en aanzien te verschaffen. Dit vakjargon draagt echter niet bij tot verheldering van de problemen maar veeleer tot versluiering ervan.

Vraagstuk 3b kan beter luiden:
Gegeven is $a = -1$ en $b = 0$.
Bol β met middelpunt M $(8, 4, 0)$ wordt loodrecht geprojecteerd op vlak $V1$. De projectie van β heeft met $V3$ precies één punt gemeen. Bereken de straal van β.

Het geschutter met de operator P dient hier nergens toe. Het brengt de kandidaten op een dwaalspoor. Onmiddellijk stelt men de matrix van P op, hetgeen totaal overbodig is en alleen maar tijd kost. Kennelijk heeft bij de examencommissie het devies gegolden: 'Waarom zullen we het gemakkelijk doen als het moeilijk ook kan?'

ad 4 We leren onze leerlingen bij het maken van een vraagstuk steeds te controleren of men al de gegevens wel gebruikt. Is dit niet het geval dan zit er kennelijk een oneffenheid in de oplosmethode.

Van de drie vragen in vraagstuk 3c heeft men de gegeven $b = -5$ niet nodig, het gegeven $a = 1$ slechts éénmaal. Ook hier worden de kandidaten op een dwaalspoor gebracht.

Uit dit examen kan geconcludeerd worden dat:

a een nauwkeuriger omschrijving van het examenprogramma gewenst is.
b de gangbare leerboeken meer op elkaar afgestemd moeten worden.
c de hoeveelheid examenwerk in overeenstemming moet zijn met de beschikbare tijd.
d duurdoenerij in de vraagstelling tot niets leidt.

We hopen dat de leden van de examencommissie die de vraagstukken opstellen, wie dat dan ook mogen zijn, het examen Wiskunde II niet hanteren als een verkapte studentenstop, of als een middel tot studietijdverkorting van het W.O., maar er toe bijdragen om het vak Wiskunde II te stroomlijnen en de wiskunde-docenten in staat te stellen om op dit vak in te spelen.

Korrel

De Amerikaanse Olympiade

Ook de Verenigde Staten kennen de wiskunde-olympiade. De organisatie is anders dan bij ons. Men kan alleen deelnemen op uitnodiging. Schoolresultaten en aanbevelingen vormen de basis waarop beslist wordt wie uitgenodigd wordt. De selectie is zwaar; slechts 155 uitnodigingen werden verzonden en 146 leerlingen namen de invitatie aan.
Hieronder de opgaven.

THIRD U.S.A. MATHEMATICAL OLYMPIAD
MAY 7, 1974

1. Let a, b, and c denote three distinct integers and let P denote a polynomial having all integral coefficients. Show that it is impossible that $P(a) = b$, $P(b) = c$, and $P(c) = a$.
2. Prove that if a, b, and c are positive real numbers, then
$$a^a b^b c^c \geqq (abc)^{(a+b+c)/3}$$
3. Two boundary points of a sphere of radius 1 are joined by an interior arc of length less than 2. Prove that the arc must lie in some hemisphere of the given sphere.
4. A father, mother, and son decide to hold a certain type of board game family tournament. The game is a two person one with no ties. Since the father is the weakest player, he is given the choice of deciding the two players of the first game. The winner of any game is to play the person who did not play in that game and so on. The first player to win two games wins the tournament. If the son is the strongest player, it is intuitive that the father will maximize his probability of winning the tournament if he chooses to play the first game with his wife. Prove that this strategy is indeed optimal. It is assumed that any player's probability of winning an individual game from another player does not change throughout the tournament.
5. Consider the two triangles $\triangle ABC$ and $\triangle PQR$ shown in figure 1. In $\triangle ABC$, $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 120°$. Prove that $X = u + v + w$.

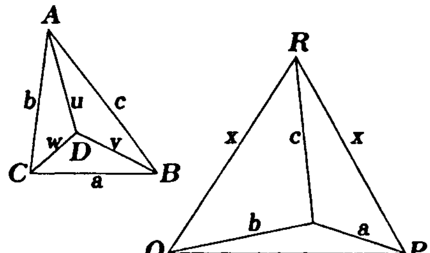


Fig. 1

Voor elke opgave kon men ten hoogste 25 punten behalen. Het scoreverloop vindt men in de onderstaande tabel.

Score per Problem

Score \ No.	1	2	3	4	5
21–25	1	5	4	0	3
16–20	16	22	11	33	15
11–15	2	8	5	33	10
6–10	1	20	12	30	49
1– 5	6	58	86	16	35
0	120	33	28	34	34

Slechts 9 kandidaten behaalden meer dan 60 punten. Ze bleven alle onder de 90. Het bovenstaande is overgenomen uit The Mathematics Teacher van januari 1975. Men vindt in dit tijdschrift ook de uitwerking van de opgaven.

P. G. J. Vredenduin

Didactische Literatuur

Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht
Jahrgang 28 – Heft 3 – April 1975
Ferd. Dümmlers Verlag Bonn/Hirschgraben-Verlag. FFM

In de rubriek 'Aus der Schulpraxis-Für die Schulpraxis' bevat dit nummer van MNU enkele interessante artikelen die betrekking hebben op het rekenen in het voortgezet onderwijs.
In het artikel 'Numerische Aspekte bei der Behandlung von Gleichungen' bespreekt J. Blankenagel voorbeelden van de invloed van onnauwkeurigheden en schattingen op de uitkomsten van lineaire en kwadratische vergelijkingen. Meestal wordt het oplossen van vergelijkingen in de wiskunde niet bekeken van het oogpunt uit dat de gegeven coëfficiënten benaderde getallen zijn, terwijl de natuurkunde of scheikundeleraar daar wel mee te maken krijgt.
Over het inleiden in de computerkunde spreekt W. Wesseling in het artikel 'Computermathematik in der Orientierungsstufe". Er wordt een 'Unterrichtseinheit' besproken bestaande uit vijftien lesuren.
Het derde artikel dat hiermee verwantschap vertoont is dat van J. Bruhn 'Kleincomputer im Physikunterricht – Beispiele für den Einsatz eines programmierbaren Tischrechners'.

G. Krooshof

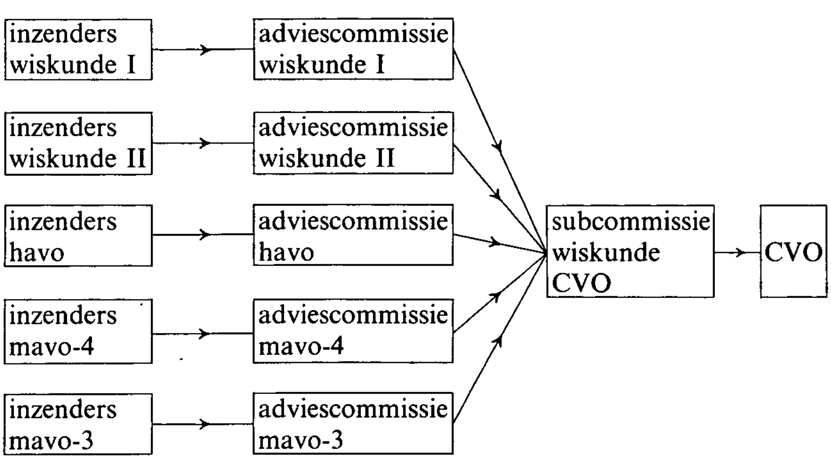
Contact tussen Vlaanderen en Nederland

Zoals eerder in dit tijdschrift vermeld, is de Belgische Vereniging voor Wiskundeleraars omstreeks het begin van 1975 uiteengevallen in een Nederlandstalige en een Franstalige vereniging. De Nederlandstalige vereniging is de VVWL, de Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars.
In april in Knokke had het eerste nog officieuze contact plaats tussen de besturen van de VVWL en de NVWL. We besloten een gemeenschappelijke meer voltallige bestuursvergadering te beleggen en te zien op welke manier we het contact tussen Vlamingen en Nederlanders doelmatig konden verstevigen. Die bestuursvergadering heeft plaats gehad op 18 oktober in Antwerpen. Onze zuiderburen bleken voortreffelijke gastheren te zijn en met het meeste genoegen denkt ons bestuur, dat voltallig aanwezig was, aan deze bijeenkomst terug. Maar Euclides is nu eenmaal een serieus blad en ik volsta daarom met de lezers een verslag te doen van hetgeen in de vergadering besloten is.
Het leek ons geëigend een gemeenschappelijke bijeenkomst te organiseren van de Vlaamse en de Nederlandse leraren, waarop een thema besproken zal worden dat voor beide landen van belang is: het aanvangsonderwijs in de meetkunde. De meesten van ons zullen wel weten, dat de benadering van dit thema in Vlaanderen en in Nederland geheel verschillend is. Het leek ons daarom interessant eens van elkaars standpunten te kunnen kennisnemen en de uitgangspunten met elkaar te kunnen vergelijken. We hebben besloten daaraan een dag te wijden, en wel zaterdag 13 maart. Als plaats van samenkomst is Eindhoven gekozen. Nadere bijzonderheden volgen. Reserveert u alvast deze dag. We hopen op een grote opkomst.
Uiteraard is het niet de bedoeling het bij deze ene gemeenschappelijke vergadering te laten.

P. G. J. Vredenduin

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Wie precies weet hoe eindexamenopgaven voor vwo, havo en mavo tot stand komen kan direct zijn aandacht wijden aan de aan het eind van dit exposé geplaatste oproep.
Voor iedereen die minder van deze gang van zaken afweet, volgt hier wat informatie.
In de *CVO* (Commissie Vaststelling Opgaven), ingesteld voor het centraal schriftelijk gedeelte van de eindexamens bij het vwo, havo en mavo, hebben vertegenwoordigers van verschillende groeperingen zitting. Deze groeperingen zijn: de inspectie AVO (20 leden), het Mavoverband (5), de Algemene Vereniging van Schoolleiders (4), de Besturenbonden (6) en het hoofdbestuur van het NGL (3); verder hebben twee leden de zorg voor de staatsexamens vwo/havo en mavo en is het CITO door één lid vertegenwoordigd.
Ten behoeve van de beoordeling van het examenwerk zijn in de CVO voor elk vak afzonderlijk *subcommissies* gevormd.
Deze commissies nemen geruime tijd vóór de vaststellingsdatum een concept examenwerk in ontvangst van *adviescommissies*, waarvan de leden docenten zijn, die door de CVO in deze commissies benoemd worden op voordracht van de diverse vakorganisaties (voor wiskunde: de NVW). Jaarlijks treedt één lid af, zodat regelmatig aflossing plaats vindt.
De adviescommissies maken het concept examenwerk aan de hand van bij hen ingediende opgaven van *inzenders*. Deze inzenders zijn docenten bij het vwo, havo en mavo en worden door de vakorganisaties uitgenodigd een examen te ontwerpen.
Schematisch ziet de totstandkoming van de examens wiskunde voor vwo, havo en mavo er als volgt uit:



Ten aanzien van mavo-3 en mavo-4 zij vermeld dat het hier gaat om het z.g. open werk en niet om het meerkeuzewerk. Ten behoeve van dit laatste stelt een schrijfgroep van het CITO een concept samen.
Verder werkt de adviescommissie mavo-3 nauw samen met de Centrale Commissie lto-t/lbo-c.
De adviescommissie mavo-4 ontwerpt momenteel zélf de opgaven. Verzoeken aan docenten vraagstukken in te zenden hadden in het verleden helaas sporadisch succes. Eén van de doelen van onderstaande oproep is in deze situatie verbetering te brengen, zodat ook de mavo-commissie uit ingezonden vraagstukken een verantwoorde keuze kan maken.
Uit het bovenstaande blijkt dat de docenten in het veld een grote inbreng kunnen hebben bij de totstandkoming van het examenwerk.
Daarom doet het bestuur van de NVW een

OPROEP

aan docenten werkzaam bij het vwo, havo en mavo zich aan te melden als inzender van examenopgaven voor de cursus 1976–1977.
Aanmelding dient te geschieden vóór 1 februari 1976 bij de secretaris van de NVW, drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132 te Den Haag, telefoon: 070-687998 of 070-687670.
Als iemand na de aanmelding wordt uitgenodigd opgaven in te zenden ontvangt hij of zij tevens alle nodige aanwijzingen. De indiening van een compleet stel examenopgaven wordt beloond met een bedrag gelijk aan drie vacaties (momenteel driemaal *f* 60,–).

Boekbespreking

Dr. A. H. van der Zwaan, *Leveren en laten leveren*, met een voorwoord van prof. dr. L. U. de Sitter, 134 blz., Universitaire Pers, Rotterdam.

Dit boek is van sociologische aard. Hoewel het zich niet beperkt tot het vak sociologie in engere zin, maar ook allerlei aanverwante studierichtingen in het betoog betrekt (bedrijfseconomie, organisatie, operations research e.d.) ademt dit boekje toch wel typisch de sfeer van de sociologie. Dit komt terstond tot uitdrukking in een taalgebruik dat bij velen in deze wetenschap steeds meer ingang heeft gevonden en dat opvalt door opeenstapelingen van 'vreemde' woorden en termen. Het gaat hier niet alleen om vreemd in de zin van niet-nederlands, maar vooral om de vele wonderlijke aaneenrijgsels van woorden en woordbrokken aan het grieks, latijn en soms ook nog aan een andere taal ontleend; hieraan blijken dan, uit taalkundig oogpunt niet in de verwachting liggende, betekenissen te zijn toegekend. Dit maakt nogal eens literatuur, die uit de sociologische hoek komt, voor niet-sociologen onbegrijpelijk.
Dit alles geldt ook voor een belangrijk deel voor het hier aan de orde zijnde boekje. Het begint reeds in de ondertitel: 'Een sociotechnische systeemanalyse' ... Wat voor soort analyse hier bedoeld wordt is stellig niet op slag duidelijk, althans voor de niet ingewijde; integendeel!
De hoofdtitel 'Leveren en laten leveren' heeft – als wij de schrijver goed begrepen hebben – betrekking op het productieproces waarin het product in wording in een bepaalde afdeling een zeker stadium in het productieproces doorloopt om daarna aan een volgende afdeling te worden geleverd die het een volgende fase doet doorlopen. Uiteraard is een goede planning vereist om dit ingewikkelde proces zo te doen verlopen dat alles goed in elkaar past, de ene afdeling niet op de andere behoeft te wachten, in bepaalde stadia zich geen bottlenecks bevinden die het proces zouden vertragen. Doch dit alles ligt op het terrein van de bedrijfseconomie. Het is uiteraard het goed recht van de schrijver hieraan ook op *zijn* wijze aandacht te schenken. Hij laat, alvorens aan het onderwerp 'leveren' enz. toe te komen een zeer lange sociologische uiteenzetting vooraf gaan; het productieproces wordt vervolgens als een sociologisch onderwerp benaderd. Over het àl dan nièt geslaagd zijn van de beschouwing en het eventueel nut hiervan voor de wetenschap of de praktijk is moeilijk een oordeel te geven.
Wèl kritiek, en zulks in afkeurende zin, hebben wij tegen de gebruikte terminologie die, in plaats van verhelderend, in hoge mate versluierend werkt.

Van Traa

J. Verlooy, *Wiskunde De Rij* 6/3, *Combinatieleer en kansrekenen*, De Nederlandsche Boekhandel, Antwerpen/Utrecht, 1974, 80 blz., 85BF.

De combinatieleer is vrij uitvoerig opgezet. Er wordt meer behandeld dan voor de kansrekening vereist is. Aan de orde komen: permutaties, permutaties met gelijke elementen, variaties, variaties met herhaling, combinaties en combinaties met herhaling. De auteurs hebben zorg gedragen voor een correcte formulering zolang geen herhalingen optreden. Terecht zijn ze dan echter op de ouderwetse terminologie overgestapt, althans didactisch terecht. Natuurlijk volgt de binomiumformule.
Het kansbegrip is ingevoerd uitgaande van frequentiebeschouwingen. Al spoedig wordt overgegaan daarna op een axiomatische fundering van het kansbegrip. Uit deze axioma's wordt de formule

$$P(G) = \frac{\text{aantal elementen van de gebeurtenis } G}{\text{aantal elementen van de uitkomstenverzameling } U}$$

afgeleid. Deze formule speelt een centrale rol in de verdere beschouwingen. Zo wordt bijv. de formule

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

met behulp van deze formule afgeleid en niet algemeen bewezen. Met een uitvoerige behandeling van onafhankelijke gebeurtenissen wordt het boek besloten.
Het boek is goed verzorgd en duidelijk geschreven.

P. G. J. Vredenduin

A. A. Andronov e.a.: *Qualitive theory of second-order dynamic systems*, XII + 524, John Wiley & Sons, Israel Program for scientific translations.

Zoals bekend is, kan een n-de orde gewone differentiaalvergelijking worden teruggebracht tot een eerste orde differentiaalvergelijking in de R^n. Daarbij correspondeert de oorspronkelijke differentiaalvergelijking met een vectorveld op de R^n; oplossingen van de differentiaalvergelijking corresponderen met integraalkrommen van het vectorveld, d.w.z. met krommen die overal raken aan de veldvektor. In het bijzonder geven tweede orde differentiaalvergelijkingen aldus aanleiding tot een vektorveld op de R^2 en daarmee tot een nadere studie omtrent het verloop van de integraalkrommen van een zodanig vectorveld. Vanuit de toepassingen gezien is er alle reden tot een nadere studie van dit bijzondere geval omdat tal van trillingsverschijnselen uit de techniek, in het bijzonder ook uit de radiotechniek, door tweede orde differentiaalvergelijkingen worden beschreven. Daarbij doet zich de omstandigheid voor dat meestal de oplossingen van de vergelijkingen niet door middel van elementaire functies kunnen worden verkregen, zodat men voor een eerste oriëntatie omtrent het gedrag van de oplossingen is aangewezen op een kwalitatief onderzoek. Vragen van een kwalitatieve natuur zijn o.a. die naar het bestaan van stationnaire toestanden, naar het bestaan van periodieke oplossingen, naar die van aperiodieke oplossingen, naar de stabiliteit van oplossingen enz.. Al deze vragen corresponderen met vragen t.a.v. het gedrag van de integraalkrommen van het vectorveld. De grote verdienste van het onderhavige werk is de manier van de presentatie. Geleidelijk aan worden, mede aan de hand van tal van illustratieve voorbeelden, deze vrage opgeworpen en beantwoord. De laatste hoofdstukken geven een beschrijving van de gegevens waardoor het kwalitatieve totaalbeeld van het verloop van de integraalkrommen wordt vastgelegd, analoog zoals men bij het schetsen van een grafiek voor het kwalitatieve verloop genoeg heeft aan de ligging van maxima, minima en buigpunten. De wijze van presentatie maakt dat het gelezen kan worden zonder dat veel voorkennis vereist is, terwijl degenen met een meetkundige inslag dat met veel plezier zullen doen.

H. T. van Est

E. Bouqué en F. Goethals, *Opbouw* 6c, Wesmael-Charlier, Namen, 1974, VII + 94 blz.

Ook dit boek is bestemd voor de eerste klasse van de afdelingen latijn-wiskunde en wetenschappelijke A, dus voor de leerlingen die de maximale hoeveelheid wiskunde wensen. De inhoud beslaat de volgende onderdelen uit het officiële programma:
Begrippen over bilineaire en kwadratische vormen
Lineaire vormen op een vectorruimte V. Bilineaire vormen op $V \times V$ en geassocieerde kwadratische vormen op V. Verandering van basis. Matrix-voorstellingen. Betekenis van de rang en van de diagonaalvorm van de matrixvoorstellingen.
Begrippen over projectieve ruimten
Definitie van een projectieve tweedimensionale ruimte geassocieerd aan een driedimensionale vectorruimte. Projectief punt, projectief vlak, gronddriehoek, eenheidspunt. Projectieve rechten. Duale ruimte. Puntenrij, stralenbundel, dubbelverhouding.
De eerste helft van het bovengenoemde programma mondt uit in de bestudering van niveaukrommen van kwadratische vormen in het vlak, dus van krommen van de vorm $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$

$= k$. Uitvoerig wordt de klassificatie van deze krommen besproken.
De tweede helft van het programma is boeiender. In het kort komt de behandeling van de projectieve meetkunde neer op het volgende. Neem een driedimensionale vectorruimte met oorsprong (nulvector) O. Beschouw de verzameling van vectorlijnen in dit vlak, dus van lijnen door O. Deze verzameling heet een projectief vlak. Of anders: breng een vlak aan dat niet door O gaat. Vul dit aan met oneigenlijke punten, die gedefinieerd worden als richtingen. Er is dan een bijectie tussen de lijnen door O en de punten (incl. oneigenlijke punten) van het snijvlak. Het is duidelijk dat men deze bijectie tot een isomorfie kan uitbouwen. Waarna men ook het met oneigenlijke punten aangevulde vlak een projectief vlak kan noemen. De lijnen door O zijn bepaald door de verhouding van de coördinaten van hun punten. Deze verhoudingen kiest men als coördinaten van de punten in het projectieve vlak. Waarmee de basis voor de ontwikkeling van de projectieve vlakke meetkunde gelegd is. De belangrijkste resultaten die afgeleid worden, zijn: het dualiteitsprincipe, de stelling van Pappus en de stelling van Desargues.
Tot slot komen de dubbelverhoudingen nog even aan de orde, maar op het grote belang ervan wordt nauwelijks ingegaan.
Een aardig boek, dat vlot geschreven is en gemakkelijk leest.

P. G. J. Vredenduin

Dr. A. van Dop c.s., *Wiskunde voor m.b.o.* deel 1, Wolters-Noordhoff, Groningen, 299 pag., *f*25,–.

Dit boek, bestemd voor de m.t.s., is ontstaan als bewerking van deel 1, 2 en 3 van 'Wiskunde Bovenbouw Havo' van dezelfde schrijvers. Sommige onderwerpen uit deze boeken zijn niet meer opgenomen, andere zijn toegevoegd zoals e-machten, natuurlijke logaritme, complexe getallen, integraalrekening, schakelalgebra, nomografie. Het formaat en de bladspiegel van het boek is gelijk aan wat we van de genoemde boeken gewend zijn: ruim van indeling, overzichtelijk, brede kantlijn. Ook in dit boek wordt ieder hoofdstuk *begonnen* met een samenvatting van het komende vaak in een historisch kadertje. De uitleg van de theorie is helder, de toepassing in de vraagstukken is goed. Naast alle lof voor dit werk enkele kritische opmerkingen die in een volgende druk misschien zijn te verwerken.
Op blz. 21 in § 1.7 moet *ab* en a^2 cursief en niet romein.
De formele definitie van relatie op bl. 37 kan misschien beter geformuleerd worden in termen van toevoegingen dan als verzameling geordende paren. Dit mede m.h.o. op het 'type leerling' en 'waarvoor' dit bestemd is.
Op blz. 63 wordt alleen *vermeld* (niet toegelicht!) dat graden minder geschikt zijn voor goniometrische functies dan radialen. De lezer zou hieruit en uit het vervolg kunnen afleiden dat goniometrische functies toevoegingen tot stand brengen tussen de verzameling radialen en $\mathbb{R}$. Het is toch zeer belangrijk dat de leerlingen deze functies leren definiëren op $\mathbb{R}$. De hele kwestie blijkt nu weer in het duister hangen; de goniometrische functies definiëren op radialen maar later bij het tekenen van grafieken wel reële getallen op de X-as.
Om alle on- en wanbegrip te vermijden ware het wenselijk de notatie $n \to +\infty$ nauwkeuriger te expliceren dan '*n* nadert tot plus oneindig' (bl. 76).
Waarom nu toch weer de term '*oneigenlijke limieten*' invoeren? (bl. 80) De bedoelde limieten bestaan eenvoudig niet. Ze kunnen dus ook niet oneigenlijk *zijn*.
bl. 82. $\frac{a}{0}$ is niet gedefiniëeerd. Bedoeld is $\frac{a}{0}$ stelt geen getal voor. Niet gedefiniëerd zijn kunnen we beter reserveren voor bijv. $\frac{0}{0}$.
9e regel v.o. '..., dan nadert de breuk tot $+\infty$'. Beter ware: ... dan wordt de breuk oneindig groot. o.i.d.
bl. 83. Het geval $\frac{0}{0}$ krijgt niet die aandacht die het wel behoeft. Limieten zijn juist voor dit soort gevallen bestemd. Door de uitsluitende behandeling van dit geval in *een* voorbeeld ontgaat de leerl. het wezen van de limieten. Men ziet zo enkel enige methodes.
Het zou nuttig zijn hetzij te behandelen, hetzij in een opgave de leerlingen voor te zetten waarom negatieve machten van het getal nul, de nulde macht van het getal nul en gebroken machten van negatieve getallen niet gedefiniëerd zijn.
De afgeleide van het quotient van twee functies is voor de leerlingen overzichtelijker en eenvoudiger te geven door eerst de afgeleide van $1/v(x)$ te bepalen en daarna m.b.v. de reeds afgeleide produktregel de afgeleide van $u(x)/v(x)$.

Waarom wordt het symbool j ingevoerd i.p.v. het algemene gangbare i? Ook zou het woord *component* in de reële component en de imaginaire component vervangen kunnen worden door *deel* (bl. 210).
Bovenstaande opmerkingen zijn gemaakt naar aanleiding van de laatste zin van het voorwoord.

W. Kleijne

R. Courant, *Introduction to Calculus and Analysis*; John Wiley and Sons, Chichester 1974, IIe druk, deel II, blz. 954 £ 8.50.

Na het overlijden van R. Courant in 1972 is de tweede druk verzorgd door F. John. In dit deel komen functies van meer variabelen aan de orde en de behandeling van de theorie heeft een grondige modernisering ondergaan.
Alleen de hoofdstukken: Differentiaal vergelijkingen, variatie rekening en functies van een complexe variabele zijn practisch ongewijzigd gebleven.
De lineaire algebra is in een apart hoofdstuk opgenomen en volledig herschreven. Zo zijn determinanten als alternerende (anti-symmetrische) multilineaire functies geïntroduceerd.
Een groot aantal vraagstukken begeleidt de goed en prettig leesbare tekst. Voor de antwoorden van de opgaven waren maar liefst 118 bladzijden nodig.
De uitvoering verdient alle lof, de prijs is ongeloofwaardig laag, het stel wiskundeboeken voor de HAVO is aanzienlijk duurder.

dr. W. A. M. Burgers

(1). Prof. dr. Heinz Griesel, *Die neue Mathematik für Lehrer und Studenten*; Band 2, 239 blz., geb. DM 17,80, 1973, Band 3, 178 blz., geb. DM 13,60, 1974, Schroedel Verlag, Hannover.
(2). Prof. dr. Heinz Griesel en dr. Hermann Athen, *Mathematik heute*, Mathematisches Unterrichtswerk, 5. Schuljahr, 271 blz., tweede druk 1972, geb. DM 11,60, 6. Schuljahr, 275 blz., 1971, DM 12,80, Schroedel Verlag, Hannover en Verlag Schöningh, Paderborn.

In Euclides 27, p. 112, werd reeds melding gemaakt van de verschijning van het eerste deel van Griesel's 'Die neue Mathematik'. Met de verschijning van de delen 2 en 3 is nu een degelijke handleiding voltooid die uitstekende diensten zal kunnen bewijzen bij de wiskundige vorming van allen die de moderne wiskunde in schoolverband zullen hebben te onderwijzen.
De stofverdeling van de serie is als volgt:
deel 1 behandelt: Mengen, Zahlen, Relationen, Topologie;
deel 2 behandelt: Gröszen, Bruchzahlen, Sachrechnen;
deel 3 behandelt: Rationale Zahlen, Algorithmen, Verknüpfungen, Gruppen, Körper.

Doel van Griesel's werk is 'eine Explikation und Analyse des fachlichen Hintergrundes des Mathematikunterrichts'. De auteur stelt dat zijn boek 'keine Didaktik ist im eigentlichen Sinne. Es ist, wie man kurz sagt, didaktisch orientiert'. De wiskundige onderwerpen zelf komen uitvoerig aan de orde. Voor het geven van vruchtbaar wiskunde-onderwijs is het nu eenmaal een onverbiddelijke voorwaarde dat de docent de leerstof grondig beheerst. In het huidige tijdsbestek dreigt sterker dan vroeger het gevaar dat er in het onderwijs met tal van nieuwe begrippen wat wordt gemanipuleerd door mensen die de nieuwe stof nog onvoldoende onder de knie hebben. Didaktische bezinning kan pas vruchten afwerpen in een tweede fase van de beroepsopleiding van de leraar, waarin de zakelijke beheersing van de leerstof zelf op bevredigende wijze zijn beslag heeft gekregen. Vanuit deze gedachte is Griesel's werk geschreven.
Dit aspect krijgt een te sterker relief nu Griesel niet voor één speciale sector van het onderwijs heeft geschreven, maar voor alle sectoren. Hij schreef zijn didactische oriëntatie voor 'Lehrer an Grundschulen, Gesamtschulen, Hauptschulen, Realschulen und Gymnasien'. Door het gelijktijdig op de markt te doen verschijnen van een serie leerboeken onder de titel 'Mathematik heute' weten Griesel e.a. te komen tot een prijzenswaardige longitudinale leerstofplanning. Het zwakke punt

hierin kan alleen maar zijn dat er aan deze planning voor zover mij bekend nog geen geëvalueerde didactische experimenten ten grondslag liggen.
Van commercieel standpunt beschouwd is de serie 'Mathematik heute' een Unterrichtswerk dat bedoeld is de plaats te gaan innemen van de gerenommeerde serie 'Die Elemente der Mathematik' van Reidt–Wolff–Athen. Dr. Athen uit de oude combinatie treedt naast Griesel op als Herausgeber van de nieuwe.
Athen en Griesel werden bijgestaan door een team van elf medewerkers, waarvan we hier alleen de naam noemen van Klaus Wigand, de ook in Nederland welbekende redacteur van ons zustertijdschrift 'Praxis der Mathematik'. Wigand behoorde ook reeds tot de medewerkers van Wolff, o.a. voor de verzorging van de aan het rekenen in de Vorstufe gewijde deeltjes van de 'Elemente der Mathematik'. Deze serie heeft haar plaats op de schoolboekenmarkt voor wiskunde meer dan een halve eeuw lang weten te handhaven!
Een didactische analyse van de nieuwe serie zou in Euclides stellig op zijn plaats zijn. Hier beperk ik mij tot een summiere opsomming van de hoofdtitels van de hoofdstukken der deeltjes 5 en 6, die ik ter recensie ontving.

5.1. Mengen und natürliche Zahlen;
5.2. Verknüpfungen erster Art von Mengen und von natürlichen Zahlen;
5.3. Verknüpfungen zweiter Art von Mengen und von natürlichen Zahlen;
5.4. Zahlzeichen und Rechenverfahren;
5.5. Figuren in der Ebene; Körper;
5.6. Gröszen.

6.1. Teilbarkeit;
6.2. Bruchzahlen;
6.3. Abbildungen geometrischer Figuren;
6.4. Systembrüche;
6.5. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Van de didactisch-methodische inzichten die aan 'Mathematik heute' ten grondslag liggen, noemen we de volgende:
a Wiskundige begrippen dienen alle aan de hand van een grote verscheidenheid van voorbeelden uit de ervaringswereld van de leerling tot stand te komen;
b Er dient in het onderwijs gebruik gemaakt te worden van didactisch materiaal van zeer verschillend karakter; de verdeling van deze middelen over 'Bild, Sprache, Symbolik' is voorwerp van permanente didactische zorg;
c Wiskundig inzicht wordt op school allereerst langs inductieve weg verkregen;
d Het taalgebruik dient zo eenvoudig mogelijk te zijn; de leerstof wordt verdeeld in kort gehouden opdrachten; in deze wordt veel theorie verwerkt;
e De boekjes bevatten een overvloed aan oefenmateriaal; de begeleidende docent staat mede voor de taak zorg te dragen voor een keuze die aangepast is aan de persoonlijke behoeften van zijn leerlingen;
f Mede ter bevordering van de bruikbaarheid voor verschillende schooltypen en van verschillende leerlingengroepen is er door passende typografische symbolen een differentiëring in de tekst aangebracht.

Een breuk met voorheen heersende didactische inzichten betekenen deze formuleringen niet. Afzonderlijke 'Lehrerhefte', waarin o.a. de leerdoelen die bij de behandeling van de afzonderlijke onderwerpen worden nagestreefd, worden gespecificeerd en waarin didactische opmerkingen van velerlei aard zijn opgenomen, dragen ertoe bij dat de bedoelingen van de auteurs bij de werkers in het veld kunnen overkomen.
Wat de delen 2 en 3 van Griesel's 'Der Neue Mathematik für Lehrer und Studenten' betreft wijzen we op de indringendheid waarmee tal van onderwerpen zijn behandeld en de zelfbeperking in de stof die de auteur zich heeft willen opleggen. Lezenswaard zijn stellig de beschouwingen over de leer der grootheden in ons wiskunde-onderwijs en de theorie over operatoren. We geven enig relief aan de stofkeuze door van het laatste en het voorlaatste hoofdstuk van het derde deel althans de hoofdtitels van de onderverdeling op te sommen.

4. Gruppen.
4.1. Definition des Gruppenbegriffs und einfache Folgerungen.
4.2. Weitere Beispiele für Gruppen, die für den Unterricht geeignet sind.
4.3. Erzeugende Elemente und Cayleygraphen.
4.4 Untergruppen.
4.5. Zur Didaktik der elementaren Gruppentheorie.

5. Körper.
5.1. Verknüpfungsgebilde mit zwei Verknüpfungen.
5.2. In Körpern gültige Sätze.

De typografische verzorging van alle genoemde uitgaven is boven iedere lof verheven. Een zeer verzorgd register zal de leraar die zich nader wil oriënteren goede diensten kunnen bewijzen.

Aan Nederlandse leraren in de wiskunde die er prijs op stellen de hier te lande in gang zijnde ontwikkelingen te vergelijken met activiteiten in het buitenland, doen er goed aan van bovenstaande uitgaven nota te nemen. In de vakbibliotheken op onze scholen zijn de uitgaven stellig op hun plaats. In de onderwijzers- en lerarenopleiding mogen ze niet ontbreken.

Joh. H. Wansink

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Contributie
1 De penningmeester verzoekt de leden, die niet zeker zijn of zij aan hun contributieverplichtingen voldaan hebben, hun bank- of girorekening te raadplegen. Binnenkort worden de enkele honderden leden, die nog niet betaald hebben, aangeschreven. Dat gaat hun dan echter wel administratiegeld kosten.
2 Op de laatst gehouden algemene vergadering van 1 november 1975 is besloten de contributie met ingang van het komende cursusjaar te verhogen tot *f* 35,– (voor hen die Euclides niet via de vereniging ontvangen *f* 15,–). Begin september 1976 worden acceptgirokaarten verzonden.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

339. Verdeel een gesloten halve bol in half open cirkelbogen. (Een half open cirkelboog is een cirkelboog die aan het ene uiteinde open en aan het andere uiteinde gesloten is.)

340. De Heer L. A. Rang (Doorn), die vroeger verschillende keren een bijdrage voor deze rubriek geleverd heeft, zendt thans de lezers van Euclides de volgende nieuwjaarswens.
Een eindige rij positieve gehele getallen is gedefinieerd door $t_1 = a$, $t_2 = b$, $t_{n+2} = t_n + t_{n+1}$, laatste term = 1976. Voor welke a en b is de lengte van deze rij maximaal?

Oplossingen

337. Gevraagd werd te definiëren: een herhalingscombinatie van k elementen uit een verzameling V met n elementen; $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Ken aan elk element a_i van V als multipliciteit p_i toe het natuurlijk getal dat aangeeft hoe vaak het in de herhalingscombinatie voorkomt. We krijgen dan een serie geordende paren (a_1, p_1), (a_2, p_2), ..., $(a_n, p_!)$.
Een herhalingscombinatie van k elementen uit V is nu een verzameling $\{(a_1, p_1), (a_2, p_2), \ldots, (a_n, p_n)\}$, waarin $p_i \in \mathbb{N}$ en $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = k$. (Wie dat leuker vindt, kan natuurlijk alle geordende paren met $p_i = 0$ laten wegvallen.)

338. Schrijf 1976 met behulp van een minimaal aantal cijfers 4. Geoorloofde bewerkingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen, worteltrekken en faculteit nemen. Het kan met vijf cijfers 4:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{(4!-4)^{4!}}}}}{4} - 4! = 1976$$

In januari 1976 verschijnt

Analyse 2½

door B. van Rootselaar
ca. 215 pag., ing., ca. f 42,–, ISBN 90 01 76352 9

Deze uitgave is te beschouwen als voortzetting van de gebruikelijke inleidingen in de analyse, en bevat de stof voor het onderdeel analyse van het examen Wiskunde M.O.B. volgens de nieuwe omschrijving van de examencommissie 1975.

De nadruk valt op de behandeling van functies van meer veranderlijken. Vooraf gaat als grondslag een bespreking van de belangrijkste eigenschappen van puntverzamelingen. Een derde deel van de tekst is gewijd aan een inleiding in de theorie der differentiaalvergelijkingen.

Tevens verschijnt

Vraagstukken analyse 2½

door M.H. Hendriks
ca. 100 pag., ing., ca. f 24,–, ISBN 90 01 37791 2

In deze uitgave is een zeer grote hoeveelheid vraagstukken samengebracht als oefenmateriaal bij Analyse 2 $\frac{1}{2}$, dat op de voet wordt gevolgd. Behalve series herhalingsopgaven waarmee men zelf kan toetsen of de reeds bestudeerde stof in voldoende mate is verwerkt, zijn ook de analyse-opgaven van de schriftelijke examens wiskunde M.O.B. opgenomen.

Ook verkrijgbaar via de boekhandel.

H. D. Tjeenk Willink Groningen

3835 368

INHOUD